Пургин А.В. ©

Кандидат физ.-мат. наук, кафедра математического анализа и методики преподавания математики в вузе, Красноярский государственный педагогический университет имени В.П. Астафьева

УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ КОНЕЧНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТОК

Аннотация

В работе приведены результаты, полученные при подходе к решению известной проблемы Гретцера 1.30 [1].Получен ответ на вопрос Ли [3], а именно, явно установлено существование собственного конечно определяемого подмногообразия многообразия околодистрибутивных решеток ***ND****, не являющегося локально конечным. В статье продолжаются исследования автора [6-9].*

Ключевые слова: решетки, многообразия решеток, квазимногообразия решеток, конечно определяемое многообразие, локально конечное многообразие.

Keywords: lattice, varieties of lattices, quasivarieties of lattices, locally finite variety.

§ 1. Метод построения конечно порожденных решеток

Все необходимые нам определения см. в [1-5, 9].

Рассмотрим метод, позволяющий строить бесконечную последовательность конечно порожденных конечных решеток и как следствие, бесконечную конечно порожденную решетку.

Метод состоит в следующем. Пусть L - конечная решетка, и a, b, c - и только они являются дважды неразложимыми (т. е. неразложимыми в объединение и в пересечение) элементами, причем для любого $x \in L$ $x \neq a, b, c$, x есть некоторое слово от элементов a, b, c. 0 и 1 – соответственно нуль и единица решетки L. Решетку L_1 строим следующим образом: берем решетку L и добавляем к ней 5 элементов $a_1, c_1, d_1, e_1, 1_1$ так, что e_1 и d_1 покрывают 1, 1_1 покрывает e_1 и d_1, a_1 покрывает a, c_1 покрывает c, e_1 покрывает a_1, d_1 покрывает c_1. Таким образом, имеем следующие соотношения: $a_1+c_1=1_1$, $a_1+b=e_1$ (так как $a_1 \parallel b$ и $a_1 \parallel 1$ получаем $a_1+b=a_1+1=e_1$), $c_1+b=d_1$ (показывается аналогично предыдущему случаю), $e_1+d_1=1_1$, $e_1 d_1=1$, $a_1 1=a$, $c_1 1=c$. Все остальные элементы порождаются элементами a, b, c, но a и c, как показано выше, порождаются элементами a_1, b, c_1, тем самым, любой элемент x решетки L_1 порождается элементами a_1, b, c_1. Далее аналогичным образом строится решетка L_2, где a_1, b, c_1 рассматриваются как a, b, c на предыдущем шаге.

Используя этот метод, получаем последовательность решеток $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$

Теорема 1.1. Для любого $n \in \mathbf{N}$ решетка L_n порождена элементами a_n, b, c_n.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n, при $n = 1$ доказательство следует из выше изложенного метода. Пусть предложение верно при $n = k - 1 \leq 1$, покажем, что оно верно при $n = k$. Для $n = k - 1$ решетка L_{k-1} порождена элементами a_{k-1}, b, c_{k-1}. Используя метод, строим решетку L_k.

Рассмотрим решетку L_{k-1}, добавляем к ней 5 элементов $a_k, c_k, d_k, e_k, 1_k$ так, что e_k и d_k покрывают 1_{k-1}, 1_k покрывает e_k и d_k, a_k покрывает a_{k-1}, покрывает c_{k-1}, e_k покрывает a_k, d_k покрывает c_k. Таким образом, имеем следующие соотношения: $a_k + c_k = 1_k$, $a_k + b = e_k$, $c_k + b = d_k$, $e_k + d_k = 1_k$, $e_k d_k = 1_{k-1}$, $a_k 1 = a_{k-1}$, $c_k 1 = c_{k-1}$. Все остальные элементы порождаются элементами a_{k-1}, b, c_{k-1}, но a_{k-1} и c_{k-1}, как показано выше, порождаются элементами a_k, b, c_k, тем самым, любой элемент x решетки L_k порождаются элементами a_k, b, c_k. Теорема доказана.

Теперь мы можем описать строение бесконечной решетки L^{ω}: решетка L^{ω} имеет в качестве подрешетки L (т. е. первоначальную решетку, с которой начиналось построение последовательности решеток L_n), причем наименьшие элементы решеток L^{ω} и L совпадают, наибольший элемент решетки L и элементы a и c не имеют покрытий (т. е. следующие цепи имеют счетные мощности: $a_{\omega} \geq \ldots > a$, $c_{\omega} \geq \ldots > c$, $1_{\omega} \geq d_{\omega} \geq \ldots > 1$, $1_{\omega} \geq e_{\omega} \geq \ldots > 1$.

Теорема 1.2. Решетка L^{ω} порождена 5 элементами $a, b, c, a_{\omega}, c_{\omega}$.

Доказательство. Очевидно, что любой элемент x подрешетки L порождается элементами a, b, c. Рассмотрим элемент $x \in L^{\omega} \setminus L$, покажем, что элемент x порождается элементами a_{ω}, b, c_{ω}. Для удобства доказательства переобозначим элементы, а именно: элемент a_{ω} обозначим a_1, элемент c_{ω} обозначим c_1, элемент $e_{\omega}= a_{\omega} +b$ обозначим e_1, элемент $d_{\omega} = c_{\omega} +b$ обозначим d_1, элемент покрываемый элементом a_1 обозначим a_2, элемент покрываемый элементом c_1 обозначим c_2 ,… , элемент покрываемый элементом a_i обозначим a_{i+1}, элемент покрываемый элементом c_i обозначим c_{i+1} для любого натурального i. Нетрудно видеть, что элемент x принадлежит множеству $\{ a_i, c_i, e_i, d_i , 1_i \}$, где $1_i= a_i + c_i$, $e_i = a_i + b$, $d_i = c_i + b$. Следовательно, осталось показать, что a_i и c_i порождаются элементами a_1, b, c_1. Докажем утверждение по индукции, при $i = 1$ утверждение очевидно, пусть предложение верно при $i = k - 1 \geq 1$, покажем, что оно верно при $i = k$. Итак a_{k-1} и c_{k-1} порождаются элементами a_1, b, c_1. Так как a_{k-1} не сравним с b и c_{k-1} не сравним с b, то $a_k = a_1(a_{k-1} + b)(c_{k-1} + b)$ и $c_k = c_1(a_{k-1} + b)(c_{k-1} + b)$.Теорема доказана.

Теорема 1.3. Многообразие K_{α} не является локально конечным.

Доказательство. Рассмотрим решетку L_9. Используя приведенный выше метод, строим бесконечную последовательность решеток L_9^1, L_9^2,…, L_9^n,…

По теореме 1.1 эта последовательность является последовательностью конечно порожденных (3-порожденных) решеток, каждая из которых является подрешеткой последующей решетки, и по теореме 1.2 решетка L_9^{ω} также является конечно порожденной (5-порожденной). Непосредственная проверка (используя лемму 1.5.) показывает, что тождество, определяющее класс K_{15} и ему двойственное выполняются на решетках L_9^{ω} для любого конечного либо счетного ω, т.е. многообразие K_{α} содержит конечно порожденную бесконечную решетку. А значит по определению локально конечного многообразия многообразие K_{α} не является локально конечным. Теорема доказана.

Замечание 1.1. Ли в [3] показывает что ND - многообразие всех околодистрибутивных решеток не является локально конечным и замечает, что "в [5] включен пример собственного подмногообразия многообразия околодистрибутивных решеток ND, не являющегося локально конечным, хотя это явно не установлено". Так как по теореме 1.1[9]$K_{\alpha} \subset ND$, то теорема 1.3 явно утверждает о существовании собственного конечно определяемого подмногообразия многообразия околодистрибутивных решеток ND, не являющегося локально конечным.

Из теорем [2, 2.7.] и1.3 получаем следствие.

Следствие 1.1. Многообразие K_{α} не порождается конечной решеткой.

§ 2. О последовательностях тождеств

Найден ряд тождеств, определяющих многообразия со свойствами, аналогичными свойствам классов K_{α} и K_{β}.

Рассмотрим следующую последовательность тождеств. Для этого введем обозначение: $u=u_0=a((b+ac)(c+ab)+(a+b)c+(a+c)b)$, $u_{n+1}=a(u_n+bc)$.

Пусть K_{15}^n - многообразие, определяемое тождеством $u_n=ab+ac$.

Соответственно K_{α}^n - многообразие, определяемое этим тождеством и ему двойственным, т. е. $K_{\alpha}^n = K_{15}^n \cap K_{15}^{n\,d}$.

Теорема 2.1. Справедливы следующие отношения между решетками и многообразиями:

(i) для любых конечных m, n и для любого счетного ω $L_6^{\omega} \in K_{\alpha}^m$, $\langle L_6^n \rangle \subset K_{\alpha}^m$;

(ii) для любого конечного n $K_{\alpha}^n \subseteq K_{\alpha}^{n-1} \subseteq \ldots \subseteq K_{\alpha}$.

Доказательство. (i). Непосредственная проверка равенств, определяющих классы $\boldsymbol{K}_\alpha^n$ на соответствующих решетках показывает, что эти решетки ринадлежат введенным классам .
(ii). Последовательность включений следует из закона об обратном отношении [3] и определения классов $\boldsymbol{K}_\alpha^n$ и $\boldsymbol{K}_\alpha$. Теорема доказана.

Литература

1. Гретцер Г. Общая теория решеток, М.: Мир, 1982.
2. Jipsen P., Rose H. Varieties of Lattices.// Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
3. Lee E. G. Almost distributive lattice varieties.// Algebra Universalis, 21 (1985) p. 280-304.
4. Rose H. Nonmodular lattice varieties.// Memoirs of Amer. Math. Soc., 292 (1984).
5. Day A., Freese R. A characterisation of identities implying congruence modularity 1.// Can. J. Math., 32 (1980), 1140-1167.
6. Пургин А. В. О решётках правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Программирование. - 2006. - N 2. - С. 40-47.
7. Пургин А. В. О дистрибутивных решётках правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Программирование. - 2009. - N 2. - С. 98-104.
8. Пургин А. В. Дистрибутивные и геометрические решётки правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Успехи математических наук. - 2009. - т. 64, N 3. - С. 185-188.
9. Пургин А.В. О свойстве локальной конечности подмнообразий квазимногообразия околодистрибутивных решеток. Современные проблемы гуманитарных и естесственных наук. 2014 С.13-15.