ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ О ПОПЕРЕЧНОМ КОНТУРЕ ТЕЛА В ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

Аргучинцева М.А. ©
Доцент, кандидат физико-математических наук,
Институт математики, экономики и информатики Иркутского государственного университета

Аннотация

В данной статье исследован класс вариационных задач нахождения поперечных контуров трехмерных тел, минимизирующих нагрев поверхности и сопротивление тела.

Ключевые слова: вариационные задачи, оптимальное аэродинамическое проектирование, гиперзвуковая аэродинамика.

Keywords: variational problems, optimal aerodynamic design, hypersonic aerodynamics.

Введение

В последнее время наряду с улучшением традиционных конфигураций, таких как осесимметричные тела и плоские крылья, ведется поиск новых трехмерных форм тел, обладающих оптимальными аэродинамическими и теплофизическими характеристиками. Из теоретических и экспериментальных исследований известно, что тела с некруговыми поперечными сечениями могут иметь меньшее сопротивление по сравнению с эквивалентными телами вращения [1]. Аналогичные результаты имеют место и при оптимизации форм тел по тепловому потоку [2].

Цель данной работы заключается в постановке и аналитическом исследовании одного класса вариационных задач нахождения поперечных контуров трехмерных тел, минимизирующих нагрев поверхности и сопротивление тела.

1. Постановка задачи

Рассмотрим гиперзвуковое движение трехмерного тела в цилиндрической системе координат (r, θ, z) с началом в вершине тела и осью z, направленной противоположно поступательному движению набегающего потока газа; θ – угол, образованный радиусом r и плоскостью xz декартовой системы координат (x,y,z). Ограничимся исследованием класса поверхностей, обладающих свойством гомотетии. Тогда каждое поперечное сечение тела, перпендикулярное оси z, должно быть геометрически подобно донному сечению тела. Поверхности таких тел описываются уравнением:

$$f(r,\theta, z) = r - \varphi(z)\rho(\theta)=0\ ,$$

где функции $\varphi(z)$, $\rho(\theta)$ определяют соответственно продольный и поперечный контуры тела. Поперечный контур тела $\rho(\theta)$ должен удовлетворять условию замкнутости контура

$$\rho(0)= \rho(2\pi) \tag{1.1}$$

и изопериметрическому ограничению на заданную площадь донного сечения S_B

$$J_V(\rho) = \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)d\theta = 2S_B, \tag{1.2}$$

где L – заданная длина тела.

В классе тонких тел с заданным продольным контуром тела $\varphi(z)$ выражения для коэффициентов волнового сопротивления C_D [1] и нагрева поверхности C_H [2.3] можно записать в виде, зависящем только от поперечного контура тела $\rho(\theta)$:

$$C_D = k_D J_D(\rho), \qquad J_D(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6(\theta) d\theta}{\left[\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)\right]}, \tag{1.3}$$

$$C_H = k_H J_H(\rho), \qquad J_H(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{2m}(\theta) d\theta}{\left[\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)\right]^{(m-1)/2}}, \tag{1.4}$$

$$k_D = \frac{1}{L^2} \int_0^L \varphi(z) \dot{\varphi}^3(z) dz = const, \quad k_H = \frac{1}{L^2} \int_0^L \varphi(z) \dot{\varphi}^m(z) dz = const.$$

Отметим [2], что подобные зависимости для коэффициента нагрева тела C_H (при соответствующих значениях $2 \leq m \leq 10$ и ограничениях на параметры гиперзвукового обтекания трехмерных тел) имеют место в ряде частных случаев теплообмена: для радиационных и конвективных тепловых потоков, при обтекании тел разреженным газом, а также при воздействии интенсивного лазерного излучения на обтекаемое тело.

Рассмотрим следующий класс оптимизационных задач: среди кусочно-гладких функций $\rho(\theta)$, удовлетворяющих ограничениям (1.1), найти ту, которая минимизирует обобщенный функционал

$$J(\rho) = \int_0^{2\pi} F(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \rho, \dot{\rho}) d\theta, \tag{1.5}$$

$$F(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \rho, \dot{\rho}) = \mu_1 \frac{\rho^{2m}(\theta)}{\left[\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)\right]^{(m-1)/2}} + \mu_2 \frac{\rho^6(\theta)}{\left[\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)\right]} + \mu_3 \rho^2(\theta).$$

Функционал (1.5) в качестве слагаемых содержит функционалы (1.3), (1.4) сопротивления и нагрева тела, а также изопериметрическое ограничение (1.2). В зависимости от конкретной физической постановки задачи смысл постоянных множителей μ_1, μ_2, μ_3 может меняться.

Используя принцип взаимности изопериметрических вариационных задач, можно привести ряд постановок задач, исследование которых сводится к минимизации обобщенного функционала (1.5).

А) Требуется найти поперечный контур тела $\rho(\theta)$, который минимизирует функционал нагрева (1.4) и удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), а также ограничению на предельно допустимое значение сопротивления C_{D*}: $C_D \leq C_{D*}$. (В этом случае $\mu_1=1$, а μ_2, μ_3 имеют смысл множителей Лагранжа). Решение данной задачи приведено в работе авторов [2].

Б) Требуется найти поперечный контур тела $\rho(\theta)$, который минимизирует функционал сопротивления (1.3) и удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), а также ограничению на предельно допустимое значение нагрева C_{H*}: $C_H \leq C_{H*}$. (В этом случае $\mu_2=1$, а μ_1, μ_3 имеют смысл множителей Лагранжа.)

В) Требуется найти поперечный контур тела $\rho(\theta)$, который минимизирует сразу два критерия – сопротивление тела (1.3) и его нагрев (1.4) и удовлетворяет условиям (1.1), (1.2).

Данная задача относится к многокритериальным вариационным задачам, для исследования которых можно использовать методы Парето и идеальной точки [4]. В методе Парето μ_1, μ_2, имеют смысл множителей Парето, а μ_3 – множитель Лагранжа.

В методе идеальной точки исходная многокритериальная задача сводится к однокритериальной с неаддитивным целевым функционалом

$$I = \left[k_D J_D(\rho) - C_{D*}\right]^2 + \left[k_H J_H(\rho) - C_{H*}\right]^2 \to \min,$$

где C_{D*}, C_{H*} – решения соответствующих однокритериальных задач о телах минимального сопротивления или минимального нагрева поверхности. С помощью метода Бунимовича-Дубинского [5] исследования неаддитивных вариационных задач, опять приходим к минимизации функционала (1.5), где

$$\mu_1 = \partial I / \partial J_H \big|_{\rho=\rho_*(\theta)}, \quad \mu_2 = \partial I / \partial J_D \big|_{\rho=\rho_*(\theta)}, \tag{1.6}$$

$\rho = \rho_*(\theta)$ – экстремаль задачи, а μ_3 – множитель Лагранжа.

Г) Рассмотрим гиперзвуковое движение тела по баллистической траектории. В рассматриваемом диапазоне скоростей гравитационная и центробежная силы малы по сравнению с сопротивлением тела, поэтому в первом приближении ими можно пренебречь. Тогда уравнения баланса сил и энергии могут быть записаны в виде

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\tilde{\rho}v^2SC_D, \qquad \frac{d\tilde{z}}{dt} = -v\sin\gamma_E, \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\tilde{\rho}v^3SC_H, \tag{1.7}$$

где v – скорость; $\tilde{\rho}$ – плотность газа на высоте $\tilde{z}$; γ_E – угол входа; t – время; H - суммарное количество тепла, поглощаемое поверхностью тела; S – характерная площадь тела; M – масса тела

$$M = k_V J_V(\rho), \qquad k_V = \frac{\tilde{\rho}_M}{2}\int_0^L \varphi^2(z)dz = const,$$

$\tilde{\rho}_M$ – плотность тела. Уравнения (1.7) исследуются при начальных условиях:

$$t = 0, \; v = v_0, \; \tilde{z} = \tilde{z}_0, \; H = 0.$$

Целевой функционал задачи строится путем исключения времени из дифференциальных уравнений (1.7) и интегрирования нагрева тела вдоль траектории движения

$$H = \int_{v_k}^{v_0} \frac{MC_H}{C_D} v dv = kI, \quad I = \frac{J_V(\rho)J_H(\rho)}{J_D(\rho)}, \;\; k = \frac{k_V k_H}{k_D}(v_0^2 - v_k^2), \tag{1.8}$$

где v_0, v_k – начальная и конечная скорости входа.

Приходим к следующей оптимизационной задаче. Требуется найти поперечный контур тела, удовлетворяющий граничному условию

$$\rho(0)=\rho(2\pi) = \rho_0,$$

изопериметрическому условию (1.2) и минимизирующий функционал суммарного нагрева тела вдоль баллистической траектории движения в атмосфере планеты I (1.8).

Согласно методу Бунимовича-Дубинского [5], исходная вариационная задача сводится к минимизации функционала (1.5) с коэффициентами вида

$$\mu_1 = \partial I / \partial J_H \big|_{\rho=\rho_*(\theta)},$$

$$\mu_2 = \partial I / \partial J_D \big|_{\rho=\rho_*(\theta)},$$

$$\mu_3 = \partial I / \partial J_V \big|_{\rho=\rho_*(\theta)} + \lambda, \tag{1.9}$$

где λ – множитель Лагранжа.

2. Аналитическое решение задачи

Для исследования общей вариационной задачи (1.1), (1.5) используется аналитический метод [1,2]. Решение оптимизационной задачи должно удовлетворять:

1) уравнению Эйлера для целевого функционала (1.5), которое допускает первый интеграл

$$F - \dot{\rho}F_{\dot{\rho}} = C, \qquad C = const; \tag{2.1}$$

2) условию трансверсальности

$$F_{\dot{\rho}}\big|_0 = F_{\dot{\rho}}\big|_{2\pi} = 0; \tag{2.2}$$

3) условию Лежандра

$$F_{\dot{\rho}\dot{\rho}} \geq 0; \tag{2.3}$$

4) условию Вейерштрасса-Эрдмана в угловых точках

$$\Delta\left[F-\dot{\rho}F_{\dot{\rho}}\right]=\Delta\left[F_{\dot{\rho}}\right]=0,$$

где символ $\Delta[\ldots]$ означает разность межу значениями до ("-") и после ("+") угловой точки θ_C. Условие Вейерштрасса-Эрдмана приводит к соотношению

$$\dot{\rho}_{+}(\theta_C)+\dot{\rho}_{-}(\theta_C)=0.$$

Следовательно, существует класс поперечных сечений, составленных из n симметричных циклов, каждый из которых занимает угол $2\pi/n$. Такой контур удовлетворяет условию замкнутости (1.1).

Ограничимся исследованием только одной дуги экстремали, составляющей половину цикла. Тогда функционал (1.5) примет следующий вид

$$J(\rho)=2n\int_0^{\pi/n}F(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\rho,\dot{\rho})d\theta. \tag{2.4}$$

Особенностью подхода, развитого в работе, является то, что ищутся не только уравнений дуг экстремали функционала (2.4), но и число этих дуг. Это приводит к введению дополнительного оптимизирующего условия на число циклов

$$\int_0^{\pi/n}Fd\theta-\frac{\pi}{n}F\Big|_{\pi/n}=0. \tag{2.5}$$

Интегрирование уравнения Эйлера (2.1) на отрезке $[0,\pi/n]$ с учетом условия трансверсальности в концевых точках $\theta_0=0,\quad \theta_f=\pi/n.$

$$F\big|_0=F\big|_{\pi/n}=C$$

приводит к соотношению

$$\int_0^{\pi/n}Fd\theta-\int_0^{\pi/n}\Phi d\theta=\int_0^{\pi/n}Cd\theta\equiv\frac{\pi}{n}F\Big|_{\pi/n},\qquad \Phi=\dot{\rho}F_{\dot{\rho}}. \tag{2.6}$$

Из (2.5), (2.6) следуют условия для оптимального контура тела

$$\int_0^{\pi.n}\Phi d\theta=0,\qquad\qquad \Phi\big|_0=\Phi\big|_{\pi/n}=0. \tag{2.7}$$

Необходимо исследовать случай, когда $\Phi=0$ в каждой точке отрезка $[0,\pi/n]$. Другой случай (когда функция Φ меняет знак на указанном отрезке) невозможен из-за нарушения уравнения Эйлера (2.1). Условия (2.7) приводят к уравнениям

$$\dot{\rho}=0, \tag{2.8}$$

$$\psi\equiv\dot{\rho}^2+\rho^2-a^2\rho^4=0,\qquad a=\left(\frac{(1-m)\mu_1}{2\mu_2}\right)^{1/(m-3)}. \tag{2.9}$$

Из условия Лежандра (2.3) следует, что уравнения (2.8), (2.9) справедливы соответственно при $\rho\le\rho_{kr}\equiv 1/a$ и $\rho\ge\rho_{kr}$.

С учетом того, что концевые точки экстремали могут располагаться на кривых (2.8), (2.9) произвольным образом, необходимо исследовать три класса тел.

3. Тело класса I

Рассмотрим случай, когда обе концевые точки лежат на кривой (2.8): $\dot{\rho}\big|_0=0$, $\dot{\rho}\big|_{\pi/n}=0$. Тогда оптимальный поперечный контур удовлетворяет уравнению (2.8), решение которого имеет $\rho=C_1,\quad C_1=const$. Таким образом, оптимальным тело класса I является тело вращения. Соответствующие значения коэффициентов сопротивления (1.3) и нагрева (1.4) имеют вид

$$C_H^{rev} = 2\pi k_H C_1^{m+1}, \qquad C_D^{rev} = 2\pi k_D C_1^4.$$

Константа C_1 определяется из заданных условий. Например, в случае заданной площади донного сечения тела $C_1 = \sqrt{S_B / \pi}.$

4. Тело класса II

Рассмотрим случай, когда обе концевые точки лежат на кривой (2.9): $\psi\big|_0 = 0,$ $\psi\big|_{\pi/n} = 0.$ Тогда решение уравнения (2.9)

$$\rho(\theta) = \frac{1}{a \cdot \cos(\theta + C_2)}, \qquad C_2 = const.$$

представляет собой сторону звездообразного поперечного контура. Неизвестные параметры $a,\ C_2$ определяются из заданных условий задачи:

$$S_B a^2 = n\big(tg(\pi/n + C_2) - tgC_2\big);$$

1) в задаче (А) $a = \sqrt{\dfrac{2S_B k_D}{C_{D*}}}$;

2) в задаче (Б) $a = \left(\dfrac{2S_B k_H}{C_{H*}}\right)^{1/(m-1)}$;

3) в задаче об "идеальной точке" (В) a находится из уравнения

$$a^{2(m-3)}\left(\frac{2k_D}{(m-1)k_H}\right)\cdot\left[k_D 2S_B - C_{D*}a^2\right] + \left[k_H 2S_B - C_{H*}a^{m-1}\right] = 0;$$

4) в задаче (Г) $a = (\rho_0 \cos C_2)^{-1}$.

Рассмотрим условие (2.5) на число циклов экстремали n. Оно приводит к

$$\left[\frac{\mu_2}{a^2}\left(\frac{m-3}{m-1}\right) + \mu_3\right]\cdot\left\{\int_0^{\pi/n} \rho^2(\theta)d\theta - \frac{\pi}{n}\rho^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\} = 0.$$

Выражение в фигурных скобках не может обращаться в нуль из-за нарушения уравнения Эйлера. Тогда $\mu_3 = -\dfrac{\mu_2}{a^2}\left(\dfrac{m-3}{m-1}\right)$. Следовательно, условие (2.5) справедливо для любого числа циклов n. Таким образом, интегралы сопротивления и нагрева не зависят от числа циклов n

$$C_H^{\min} = 2S_B k_H a^{1-m}, \qquad C_D^{\min} = 2S_B k_D a^{-2}. \tag{4.1}$$

5. Тело класса III

В данном случае экстремаль удовлетворяет условиям: $\dot{\rho}\big|_0 = 0,$ $\psi\big|_{\pi/n} = 0.$ Следовательно, поперечный контур тел описывается двумя уравнениями (2.8), (2.9) и содержит две дуги: часть окружности и прямую, касательную к ней. Аналитически, экстремаль можно представить в виде

$$\rho(\theta) = \begin{cases} 1/a, & \theta \in [0, \varepsilon], \\ 1/(a \cdot \cos(\theta - \varepsilon)), & \theta \in (\varepsilon, \pi/n], \end{cases}$$

где ε – угол сопряжения дуг экстремали, определяемый из заданных ограничений задачи:

$$S_B a^2 = n\big(\varepsilon + tg(\pi/n - \varepsilon)\big).$$

Выражения для сопротивления и нагрева тел класса III также не зависят от числа циклов n и определяются по формулам (4.1).

Таким образом, были найдены три класса экстремалей: 1) тело вращения при $S_B a^2 = \pi$, 2) звездообразное тело при $S_B a^2 > n \cdot tg(\pi / n)$, 3) звездообразное тело круговыми включениями при $S_B a^2 \in (\pi, n \cdot tg(\pi / n))$. Использование оптимальных форм тел дает значительное снижение как сопротивления тела, так и нагрева поверхности по сравнению с эквивалентными телами вращения (до 90 % – для класса II; до 70% – для класса III).

Литература

1. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А.Миеле. – М.: Мир, 1969. – С.306-324.
2. Аргучинцева М.А., Пилюгин Н.Н. Оптимизация формы пространственного тела по радиационному тепловому потоку // Теплофизика высоких температур. – 2002. – Т.40, №4. – С.603-616.
3. Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А. Динамика ионизованного излучающего газа. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 305с.
4. Ногин В.Д., Протодъяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации. – М.: Высшая школа, 1986. – 384с.
5. Бунимович А.И., Дубинский А.В. Вариационный метод для обобщенного класса функционалов и его применение к задачам аэромеханики // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1973. – №1. – С.15-26.