МЕТОД ПЕРЕНОСА В РЕШЕНИИ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Магасумов Г.С. ©
Доцент, кафедра высшей математики
Северо-Восточный государственный университет, г. Магадан

Аннотация

Метод переноса в решении позиционных задач является одним из основных методов построения сечений многогранников плоскостями. В данной статье раскрывается содержание метода переноса прямых и плоскостей при построении сечений, даются примеры решения таких задач.

Ключевые слова: сечение, позиционная задача, метод параллельного переноса прямых и плоскостей

Keywords: section, positional task, method of parallel traces lines and planes.

Введение

Из курса геометрии известны метод следов и метод внутреннего проектирования построения сечений многогранников и круглых тел плоскостями [1; с.121]. Дополним данные методы методом параллельного переноса прямых и плоскостей и приведём ряд примеров решения позиционных задач методом параллельного переноса прямых и плоскостей.

Метод параллельного переноса прямых и плоскостей

В основу данного приёма положены свойства и признаки параллельности прямых и плоскостей в пространстве. В частности, теоремы.

1. Если $a \parallel \alpha$, то в плоскости α. существует прямая b, параллельная a.
2. Через точку пространства можно провести единственную плоскость, параллельную данной плоскости.
3. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.
4. Если плоскость β проходит через прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает ее по прямой b, то $a \parallel b$.
5. Признак параллельности прямой и плоскости $((a \parallel b,\ b \in \alpha) \rightarrow a \parallel \alpha)$.
6. Признак параллельности двух плоскостей.
7. Каковы бы ни были скрещивающиеся прямые a и b, существует единственная пара параллельных плоскостей α и β, в которой они соответственно лежат.

Метод параллельного переноса прямых и плоскостей применяется в тех случаях, когда секущая плоскость α задана как плоскость, проходящая через данную точку M параллельно двум скрещивающимся прямым a и b, или через данную прямую a параллельно скрещивающейся с ней прямой b, или через данную точку M параллельно данной плоскости β.

Суть метода параллельного переноса прямых заключается в том, что в секущей плоскости проводят прямую, параллельную данной прямой. При этом очень часто приходится проводить вспомогательную плоскость, параллельную той, в которой находится данная прямая.

Суть метода параллельного переноса плоскостей состоит также и в том, что удобно первоначально построить дополнительную плоскость β, параллельную искомой плоскости α. Затем, используя теорему 3 из перечисленных выше, строят сечение плоскостью α.

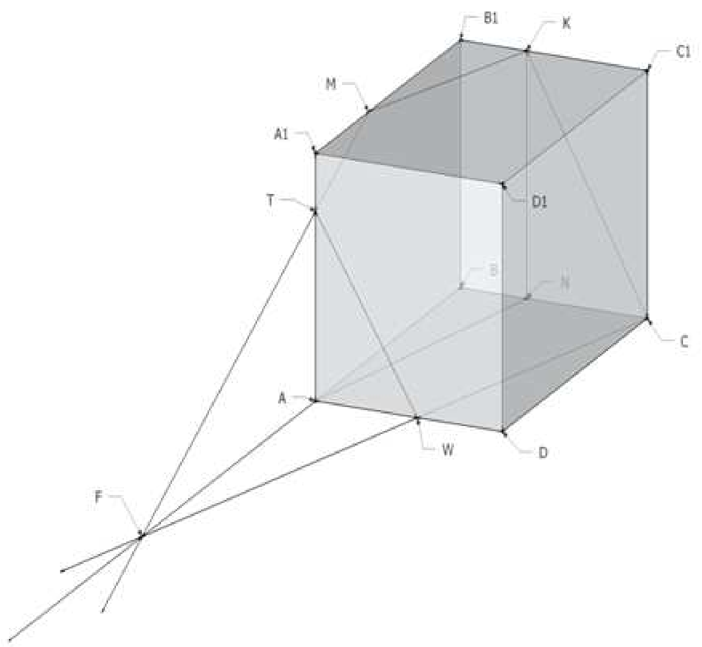
Примеры решения задач методом параллельного переноса

Рассмотрим позиционные задачи на применение метода переноса прямых и плоскостей.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$– параллелепипед. $M\in A_1B_1$ и $N\in BC$. Построить сечение α, проходящее через CM параллельно AN .

Построение.

1) $CW \parallel AN$, $W\in AD$,
2) $CW \cap BA=F$,
3) $FM \cap AA_1=T$,
4) $MK \parallel AN$, $K\in B_1C_1$,
5) $\alpha=TMKCW$ – искомое сечение.



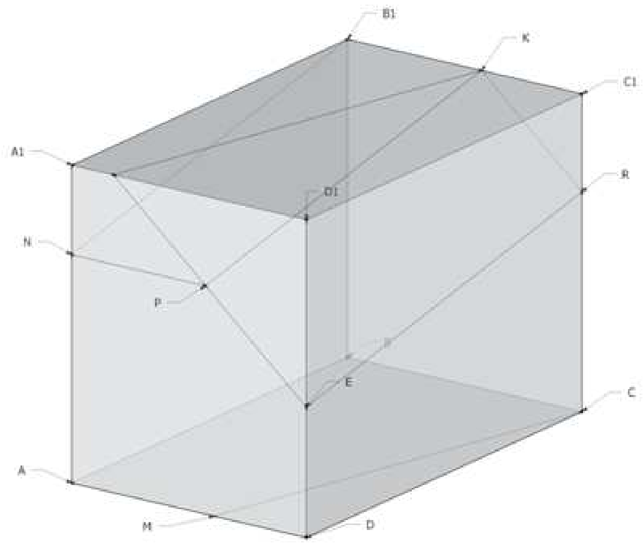
Доказательство.

1) $C \in \alpha$, $M \in \alpha \Rightarrow CM \in \alpha$,
2) $\alpha \ni CW$, $CW \parallel AN \Rightarrow \alpha \parallel AN$.

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $M\in AD$, $N\in AA_1$, $K\in B_1C_1$.Построить сечение α через K параллельно B_1N и CM.

Построение.

1) $KT \parallel CM$ (так как $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$), $T \in A_1D_1$,
2) $KP \parallel B_1N$, $NP \parallel B_1C_1$, то есть B_1NPK – параллелограмм, $P \in \alpha$,
3) $TP \cap DD_1 =E$,
4) $KR \parallel TE$, $R \in CC_1$, $KTPER$ – искомое сечение.



Доказательство.

1) $\alpha \ni K$,

2) $KT \in \alpha$, $KT \parallel CM \Rightarrow \alpha \parallel CM$,

3) $KP \in \alpha$, $KP \parallel B_1N \Rightarrow \alpha \parallel B_1N$.

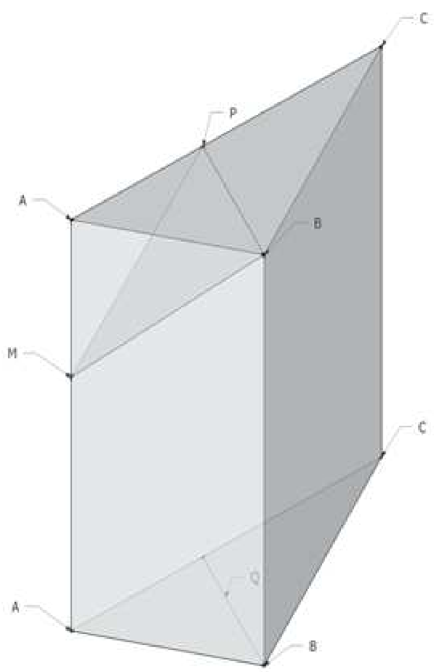
Задача 3. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма. $M \in AA_1$, $Q \in A_1B_1C_1$. Построить сечение α, проходящее через BM

параллельно прямой B_1Q.

Построение.

1) $BP \parallel B_1Q$, $P \in AC$,

2) $\alpha = MBP$ – искомое сечение.



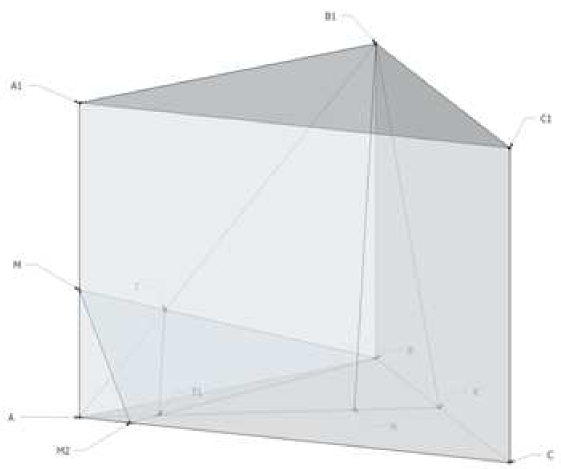
Задача 4. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма. $M \in AA_1$, $N \in ABC$. Построить сечение α, проходящее через прямую BM параллельно прямой B_1N.

Построение.

1) $AN \cap BC = K$,

2) $AB_1 \cap BM = T$,

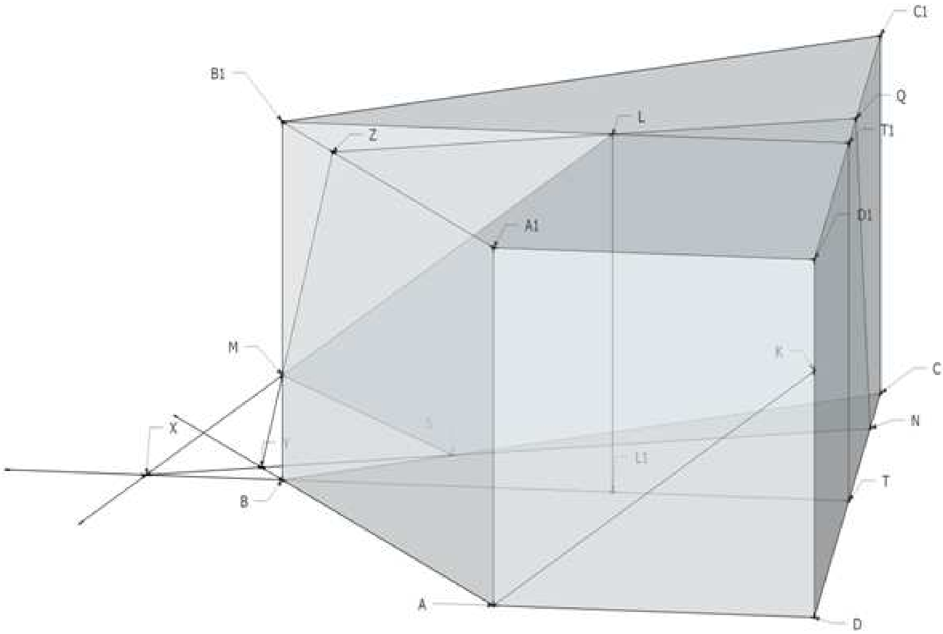
3) $TT_1 \parallel B_1N$, $T_1 \in AK$,
4) $BT_1 \cap AC = M_2$,
5) $\alpha = M_2MB$ – искомое сечение.



Доказательство.
1) $\alpha \ni BM$,
2) $TT_1 \in \alpha$, $TT_1 \parallel B_1N \Rightarrow \alpha \parallel B_1N$.

Задача 5. На ребрах BB_1, CD, DD_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M,N,K . Построить сечение α, проходящее через MN параллельно AK.

Построение.
1) $BB_1T_1T \parallel AA_1D_1D$,
2) $ML \parallel AK$, $L \in B_1T_1$, [по построению $L \in \alpha$]
3) Зная точки $M'(M,B)$, $L'(L,L_1)$, $N'(N,N)$, строим след плоскости (MLN):
$LM \cap L_1B = X$, $XN = l$ – след,
4) $AB \cap l = Y$, $YM \cap A_1B_1 = Z$,
5) $ZL \cap C_1D_1 = Q$,
6) $l \cap BC = S$,
7) $\alpha = MZLQNS$ – искомое сечение.



Доказательство.

1) $M \in \alpha$, $N \in \alpha$,

2) $L \in \alpha$, $ML \in \alpha$, $ML \parallel AK \Rightarrow \alpha \parallel AK$.

Задача 6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $M \in A_1C_1$, $N \in BB_1$, $K \in DD_1$. Построить сечение α, проходящее через точку N параллельно прямым MD_1 и AK.

Построение.

1) $BK_1 \parallel AK$, $K_1 \in CC_1$,

2) $NN_1 \parallel BK_1$, $N_1 \in B_1C_1$, [по построению $N_1 \in \alpha$]

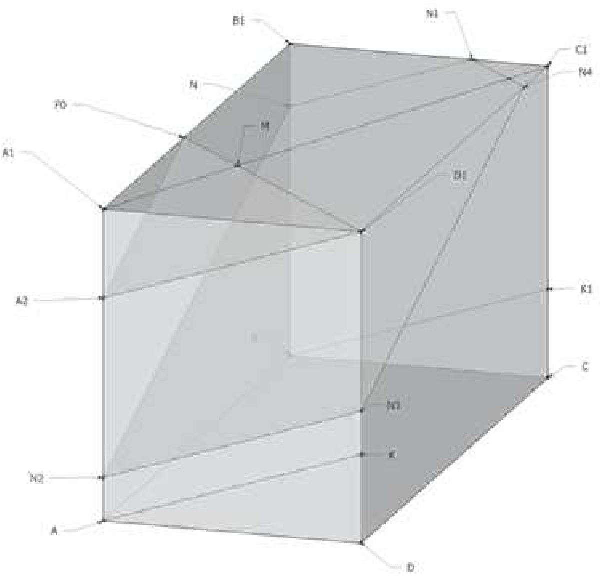
3) $A_2D_1 \parallel AK$, $A_2 \in AA_1$, $D_1M \cap A_1B_1 = F_0$, $[A_2F_0D_1 \parallel \alpha]$

4) $NN_2 \parallel A_2F_0$, $[N_2 \in \alpha]$

5) $N_2N_3 \parallel AK$, $N_3 \in DD_1$, $[N_3 \in \alpha]$

6) $N_3N_4 \parallel NN_2$, $N_4 \in C_1D_1$, $[N_4 \in \alpha]$

7) $\alpha = NN_1N_4N_3N_2$ – искомое сечение.



Доказательство.

1) $\alpha \ni N$;

2) $NN_1 \in \alpha$, $NN_1 \parallel BK_1 \parallel AK \Rightarrow \alpha \parallel AK$;

3) $MD_1 \in A_2F_0D_1$, $A_2F_0D_1 \parallel \alpha \Rightarrow \alpha \parallel MD_1$.

Задача 7. $SABC$ – тетраэдр. $M \in AB$, $N \in SC$, $K \in SA$. Построить сечение:

A) через прямую MN параллельно CK;

B) через CK параллельно MN .

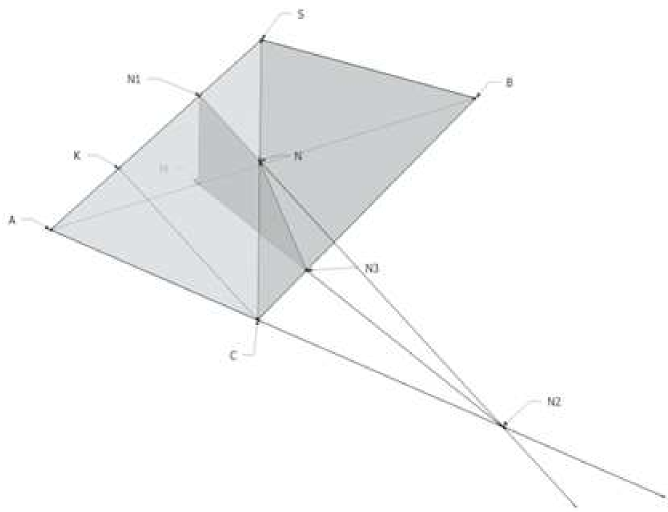
Построение.

A) 1) $NN_1 \parallel KC$ в плоскости ASC, $N_1 \in AS$,

2) $N_1N \cap AC = N_2$ в плоскости ASC,

3) $N_2M \cap CB = N_3$ в плоскости ABC,

4) MN_1NN_3 – искомое сечение α.



Доказательство.

1) $CK \parallel NN_1$, $NN_1 \in \alpha \Rightarrow CK \parallel \alpha$,

2) $M \in N_2N_3 \in \alpha \Rightarrow M \in \alpha$,

3) $N \in N_1N_2 \in \alpha \Rightarrow N \in \alpha$.

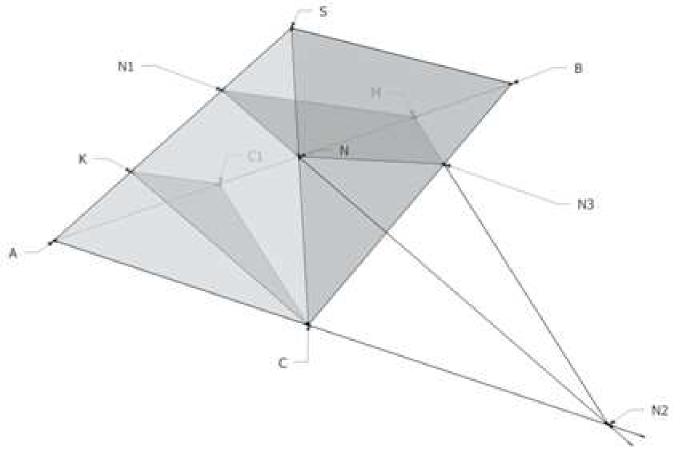
B) 1) $NN_1 \parallel KC$, $N_1 \in AS$,

2) $N_1N \cap AC = N_2$,

3) $N_2M \cap BC = N_3$,

4) $CC_1 \parallel MN_3$, $C_1 \in AB$,

5) KC_1C – искомое сечение.



Доказательство.

1) Пусть $\alpha = KCC_1$, $\beta = N_1MN_2$, $N\in N_1N_2$, $N_1N_2\in \beta \Rightarrow N\in\beta$,

2) $KC \parallel NN_1$, $CC_1 \parallel MN_2 \Rightarrow \alpha \parallel \beta$,

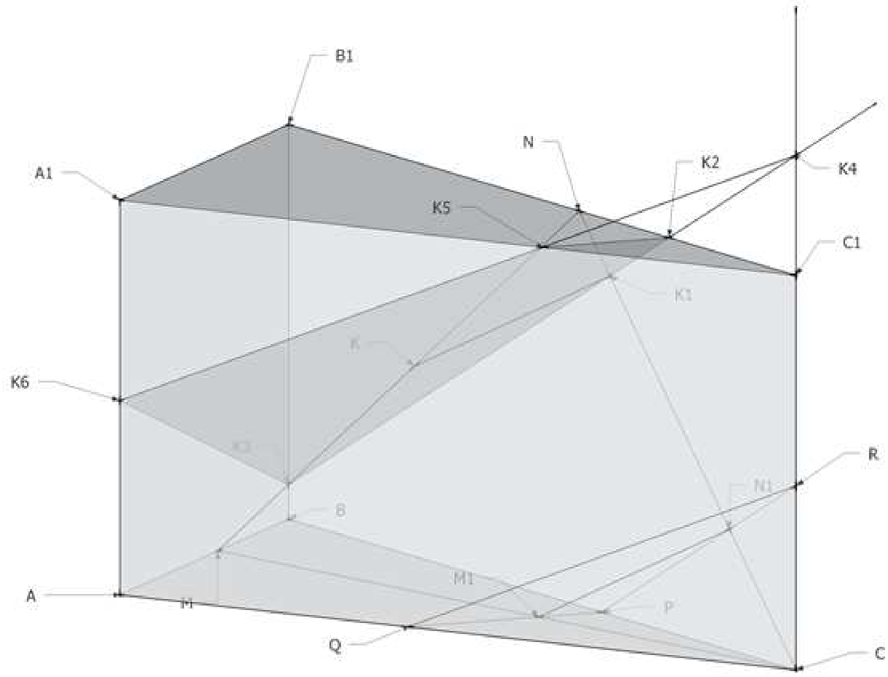
3) $N\in\beta$, $M\in\beta \Rightarrow MN\in \beta \Rightarrow MN \parallel \alpha$,

4) α – искомая плоскость, так как $CK\in\alpha$, $MN \parallel \alpha$.

Задача 8. На ребрах BC, AC, CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ – заданы соответственно точки P, Q, R, на ребрах AB, B_1C_1 – точки M, N. На отрезке MN задана точка K. Построить сечение через точку K параллельно плоскости PQR.

Построение.

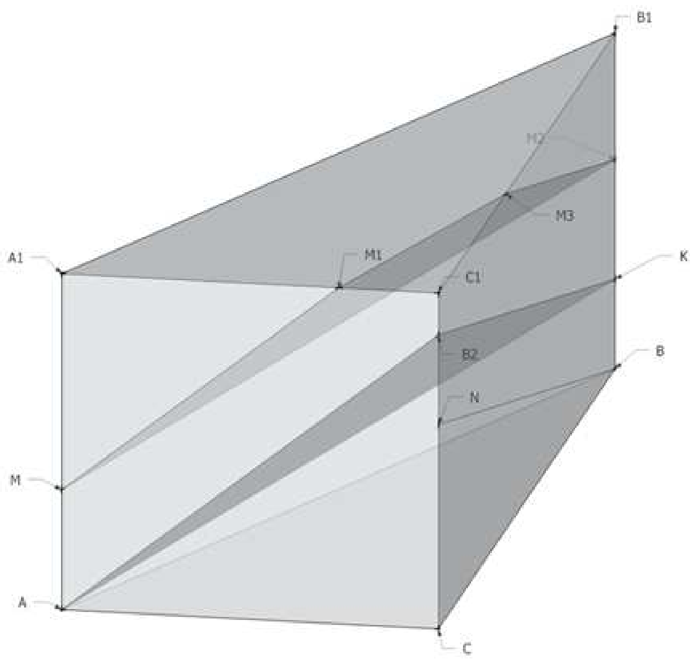
1) $MC \cap QP = M_1$,
2) $CN \cap PR = N_1$,
3) $KK_1 \parallel M_1N_1$, $K_1\in NC$,
4) $K_2K_3 \parallel PR$, $K_2\in B_1C_1$, $K_3\in B_1B$,
5) $K_2K_3\cap CC_1 = K_4$,
6) $K_5K_6 \parallel QR$, $K_4 \in K_5K_6$, $K_5\in C_1A_1$, $K_6\in AA_1$,
7) $K_3K_2K_5K_6$ – искомое сечение.



Задача 9. На ребрах AA_1, CC_1, BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки M, N, K. Построить сечение через точку M параллельно AK и BN.

Построение.

1) $MM_2 \parallel AK$, $M_2 \in BB_1$,
2) $M_2M_3 \parallel BN$, $M_3 \in B_1C_1$,
3) $KB_2 \parallel BN$, $B_2 \in CC_1$,
4) $MM_1 \parallel AB_2$, $M_1 \in A_1C_1$,
5) $\alpha = MM_2M_3M_1$ – искомое сечение.



Доказательство.

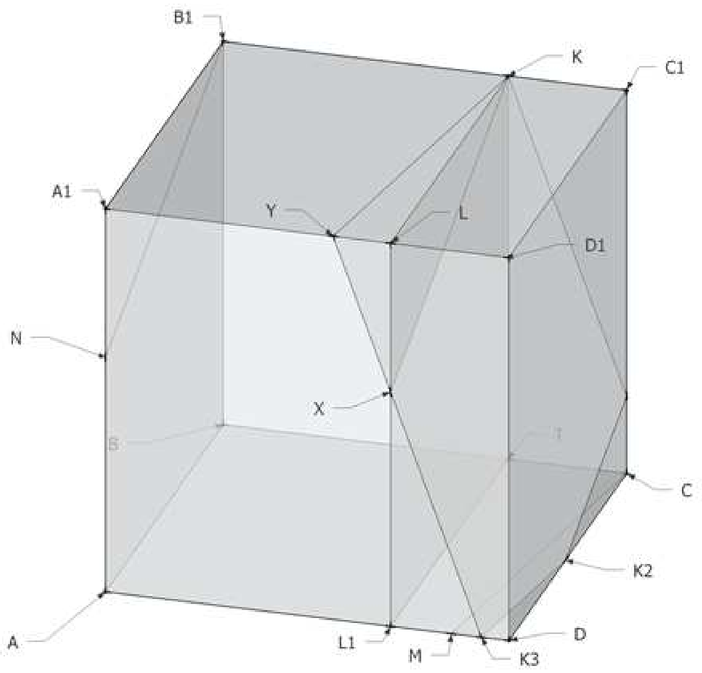
1) $\alpha \ni M$,
2) $MM_2 \in \alpha$, $MM_2 \parallel AK \Rightarrow \alpha \parallel AK$,

3) $M_2M_3 \in \alpha$, $M_2M_3 \parallel BN \Rightarrow \alpha \parallel BN$.

Задача 10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб . $M \in AD$, $N \in AA_1$, $K \in B_1C_1$. Построить сечение через точку K параллельно прямым B_1N и CM .

Построение.

1) $KL_1LT \parallel A_1B_1BA$, $KX \parallel B_1N$, $X \in LL_1$, $X \in$ сечению,
2) $KY \parallel CM$, $Y \in A_1D_1$, $Y \in$ сечению,
3) $KK_1 \parallel YX$, $K_1 \in CC_1$,
4) $YX \cap AD = K_3$,
5) $K_2K_3 \parallel MC$, $K_2 \in CD$,
6) $KK_1K_2K_3XY$ – искомое сечение.



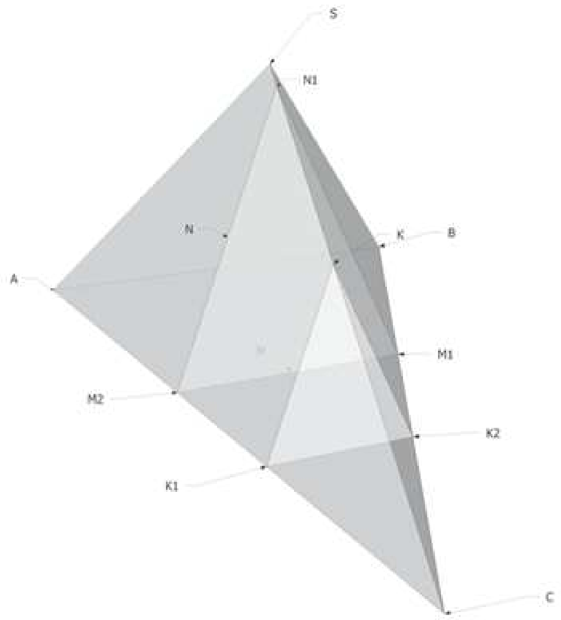
Доказательство.

1) $\alpha \ni K$,
2) $KX \in \alpha$, $KX \parallel B_1N \Rightarrow \alpha \parallel B_1N$,
3) $KY \in \alpha$, $KY \parallel CM \Rightarrow \alpha \parallel CM$.

Задача 11. $SABC$ – тетраэдр . $K \in SC$, $M \in ABC$, $N \in ACS$. Построить сечение через точку K параллельно прямым AB и MN.

Построение.

1) $M_1M_2 \parallel AB$ через точку M, $M_2 \in AC$, $M_1 \in BC$,
2) $M_2N \cap SC = N_1$, $N_1 \in SC$,
3) M_1N_1,
4) $KK_1 \parallel M_2N_1$, $K_1 \in AC$,
5) $KK_2 \parallel N_1M_1$, $K_2 \in BC$,
6) K_1K_2K – искомое сечение.



Доказательство.

1) $\alpha = M_2N_1M_1$, $M_2M_1 \in \alpha$, $\alpha \parallel AB$, $N \in \alpha$, $M \in \alpha \Rightarrow \alpha$ эMN.

2) $\beta = KK_1K_2$, $KK_1 \parallel N_1M_2$, $KK_2 \parallel N_1M_1$, следовательно, $\beta \parallel \alpha$.

3) β эK, $\beta \parallel AB$, $\beta \parallel MN$.

Литература

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия: Учебное пособие для пед. ин-тов, М.: Просвещение, 1987. Ч.2. 352 с.