Султыгов М.Д. ©
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики,
Ингушский государственный университет

КЛАСС ФУНКЦИЙ МОКАНУ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^n, n \geq 2$

Аннотация

Рассматриваются вложения классов функций, изоморфизм, критерий принадлежности голоморфной функции к классу функций Мокану с порядком. Приводится двусторонняя оценка модуля функции и модуля оператора функции и усиленные оценки этих функционалов на некоторых подмножествах пространства многих комплексных переменных. Построены экстремальные функции, достигающие точность полученных оценок на подмножествах пространства многих комплексных переменных.

Ключевые слова. Звездно однолистные функции, порядок, изоморфизм, интегральные представления, класс функций Мокану с порядком, оценка модуля функции, оценка модуля оператора функции, точность оценок на множествах, экстремальная функция.

Keywords. Star of univalent functions, procedures, isomorphism, integral representations of functions of the class of Mocanu with the procedure, evaluation function module, the rating module operator's function, the accuracy of estimates on sets, extremal function.

Обозначим через $MN_D(\alpha,\beta)$, $\alpha \in R_0^1$, $0 \leq \beta \leq 1$ [1, 178] пространство всех голоморфных функций $f(z) \in H(D)$, удовлетворяющих условиям:
$f(0)=1$, $f(z)\cdot L_1 f(z) \neq 0$ и функция $F(z_k) = z_k f(l_1 z_k,...,z_k,...,l_n z_k)$ α- звездна порядка β в Λ_m и,

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{L_1^{(2)} f(z)}{L_1 f(z)} + \alpha \frac{L_1 f(z)}{f(z)}\right\} > \beta, \ f(z) L_1 f(z) \neq 0. \qquad \text{(A)}$$

Теорема 1.1. При $0 \leq \beta < 1$, $\alpha \in R_+$ имеют место вложения

$$MN_D(\alpha,\beta) \subseteq MN_D(0,\beta) \equiv M_D(\beta).$$

Теорема 1.2. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$. Если $\varphi(z_1,z_2) \in MN_D(0,\beta)$, то функция

$$f(z_1,z_2) = \left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \left[\varepsilon\varphi(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}^{\alpha} \qquad (1.1)$$

также принадлежит классу $MN_D(0,\beta)$ при всех $\alpha \in R_+$.

Степенная функция, фигурирующая в (1.1), понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Предположим, что $f(z_1,z_2) \in MN_D(0,\beta)$. Тогда функция, определенная формулой (1.1), является голоморфной в D и $f(0)=1$. Убедимся в том, что функция (1.1), удовлетворяет в D условию (A). В самом деле,

$$L_1 f(z_1,z_2) = \left[f(z_1,z_2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\varphi(z_1,z_2)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \right]$$

и

$$\frac{(1-\alpha)L_1 f(z)}{f(z)} + \frac{\alpha L_1^{(2)} f(z)}{L_1 f(z)} = \frac{L_1\varphi(z)}{\varphi(z)}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}\frac{(1-\alpha)L_1 f(z)}{f(z)}+\frac{\alpha L_1^{(2)} f(z)}{L_1 f(z)}=\operatorname{Re}\frac{L_1\varphi(z)}{\varphi(z)}>\beta$$

в силу того, что $\varphi(z)=\varphi(z_1,z_2)\in MN_D(0,\beta)$. Следовательно, $f(z_1,z_2)\in MN_D(\alpha,\beta)$, а тогда по теореме (1.1) $f(z_1,z_2)\in MN_D(0,\beta)$.

Теорема 1.3. Пусть функция $f(z)\in MN_D(0,\beta)$. Тогда при $\alpha\ge 0$, $0\le\beta<1$ она принадлежит классу $MN_{D_r}(\alpha,\beta)$ в области $D_r=rD$, где $0\le r=r(\alpha,\beta)<1$ и $r(\alpha,\beta)$ – есть корень уравнения

$$(1-2\beta)r^2-(2-2\beta+\alpha+4\alpha\beta)r+1=0. \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим в классе $M_D(\beta)$ задачу об оценке снизу функционала

$$\Im(f)=\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\alpha)L_1 f(z)}{f(z)}+\frac{\alpha L_1^{(2)} f(z)}{L_1 f(z)}\right\}-\beta. \tag{1.3}$$

Положим

$$h(z)=\frac{\left[\dfrac{L_1 f(z)}{f(z)}-\beta\right]}{(1-\beta)}. \tag{1.4}$$

Так как $f(z)\in M_D(\beta)$, то функция $h(z)$ голоморфна в D и $h(z)\in C_D(1)$. Легко видеть, что с помощью (1.4) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между классами $C_D(1)$ и $M_D(\beta)$. Используя (1.4), функционал (1.3) запишем в виде

$$\Im f=\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\alpha)[(1-\beta)h(z)+\beta]^2+\alpha[(1-\beta)R_1h(z)+\beta]}{[(1-\beta)h(z)+\beta]}\right\}-\beta. \tag{1.5}$$

Для нахождения точной нижней границы этой величины в классе $C_D(1)$ воспользуемся оценками [2, 52]. Имеем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\alpha)L_1 f(z)}{f(z)}+\frac{\alpha L_1^{(2)} f(z)}{L_1 f(z)}\right\}-\beta=\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\alpha)[(1-\beta)h(z)+\beta]^2+\alpha[(1-\beta)L_1h(z)+\beta]}{[(1-\beta)h(z)+\beta]}\right\}-\beta=\\
&=\operatorname{Re}\left\{(1-\beta)(1-\alpha)h(z)+\alpha\left(1-\beta+\frac{(1-\beta)L_0h(z)}{(1-\beta)h(z)+\beta}\right)\right\}= \qquad (1.6)\\
&=(1-\beta)\operatorname{Re}h(z)\left\{1-\alpha+\frac{\alpha}{h(z)}\left(\frac{1+L_0h(z)}{[(1-\beta)h(z)+\beta]}\right)\right\}\ge(1-\beta)\operatorname{Re}h(z)\left\{1-\alpha-\alpha\frac{1+r}{1-r}-\frac{2\alpha r}{(1-r)[1+(2\beta-1)r]}\right\}
\end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что последняя фигурная скобка в (1.6) положительна в интервале $0\le r\le 1$ только при $r<r(\alpha,\beta)$, где $r(\alpha,\beta)$ - единственный корень уравнения (1.2). Отсюда и из $\operatorname{Re}h(z)>0$ выводим, что правая часть в (1.6) положительна при $r<r(\alpha,\beta)$. Это вместе с (1.6) доказывает справедливость неравенства в области D_r, $r<r(\alpha,\beta)$.

Пример функции $f_0(z_1,z_2)=(1-z_1e^{i\alpha_1}-z_2e^{i\alpha_2})^{2(\beta-1)}\in MN_D(0,\beta)$, для которой величина $\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\alpha)L_1 f_0(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}+\frac{\alpha L_1^{(2)} f_0(z_1,z_2)}{L_1 f_0(z_1,z_2)}\right\}-\beta$

обращается в нуль на множестве $|z_1|+|z_2|=r(\alpha,\beta)$, показывает, что число $r(\alpha,\beta)$ является наибольшим, при котором функции $f(z_1,z_2)\in MN_D(0,\beta)$ являются функциями класса $MN_D(\alpha,\beta)$.

Теорема 1.4. Пусть $\alpha\in R_+$, $0\le\beta<1$. Функция $f(z)\in MN_D(\alpha,\beta)$ тогда и только тогда, когда существует функция $F(z)\in M_D$ такая, что

$$f(z)=\left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left[F(\varepsilon z)\right]^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}d\varepsilon\right\}^{\alpha}, \tag{1.7}$$

где для степенной функции взято главное значение.

Теорема 1.5. Пусть $f(z_1,z_2)\in MN_D(\alpha,\beta)$, $\alpha\in R_+$, тогда в $\overline{D}_r=r\overline{D}$, $0\le r<1$, справедливы следующие оценки:

$$l(\alpha,\beta,-r)\le\left|f(z_1,z_2)\right|\le l(\alpha,\beta,r), \tag{1.13}$$

$$\Re(\alpha,\beta;-r)\le\left|R_1 f(z_1,z_2)\right|\le\Re(\alpha,\beta;r), \tag{1.14}$$

где

$$l(\alpha,\beta,-r)=\left\{\theta\left(\frac{1}{\alpha},\frac{(2-2\beta)}{\alpha},\frac{1}{\alpha+1};r\right)\right\}^{\alpha} \tag{1.15}$$

$$\Re(\alpha,\beta;-r)=(1-r)^{\frac{2\beta-2}{\alpha}}\cdot\left\{l(\alpha,\beta,r)\right\}^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}}, \tag{1.16}$$

а

$\theta(a,b,c,z)=\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\displaystyle\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-zu)^{-b}du$ - гипергеометрическая функция Гаусса.

Следствие 1.1.[3, 38]. Если $f(z_1,z_2)\in MN_{K^2_{1,\sigma}}(\alpha,\beta)$, то в $K^2_{1,\sigma}$ имеем:

$$l(\alpha,\beta;-\omega(|z_1|,|z_2|))\le\left|f(z_1,z_2)\right|\le l(\alpha,\beta;\omega(|z_1|,|z_2|)), \tag{1.19}$$

$$\Re(\alpha,\beta;-\omega(|z_1|,|z_2|))\le\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|\le\Re(\alpha,\beta;\omega(|z_1|,|z_2|)). \tag{1.20}$$

Точность этих оценок в случае области $K^2_{1,1}$ достигается функцией

$$f(z)=\left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left[\varepsilon F(\varepsilon z)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}^{\alpha}, \tag{1.21}$$

где

$$F(z_1,z_2)=\left[1-a_1z_1e^{i\alpha_1}-a_2z_2e^{i\alpha_2}\right]^{2(\beta-1)}.$$

Эти же оценки в случае области $K^2_{1,\sigma}$, $\sigma\ne1$ на множестве (1.17) также точны. Они достигаются функцией вида (1.21), в которой

$$F(z_1,z_2)=\left[1-2^{\sigma-1}(a_1z_1e^{i\alpha_1}-a_2z_2e^{i\alpha_2}\right]^{2(\beta-1)}.$$

Следствие 1.2.Если $f(z_1,z_2)\in MN_{U^2_{R_1,R_2}}(\alpha,\beta)$, то в $U^2_{R_1,R_2}$ справедливы неравенства:

$$l(\alpha,\beta;-\gamma(|z_1|,|z_2|))\le\left|f(z_1,z_2)\right|\le l(\alpha,\beta;\gamma(|z_1|,|z_2|)),$$

$$\Re(\alpha,\beta;-\gamma(|z_1|,|z_2|))\le\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|\le\Re(\alpha,\beta;\gamma(|z_1|,|z_2|)).$$

Точность этих оценок на множестве $\left\{\dfrac{|z_1|}{R_1}=\dfrac{|z_2|}{R_2}\right\}\cap U^2_{R_1,R_2}$ реализуется функцией вида (1.21), где

$$F(z_1,z_2)=\left[1-\left(\frac{\dfrac{z_1e^{i\alpha_1}}{R_1}+\dfrac{z_2e^{i\alpha_2}}{R_2}}{2}\right)\right]^{2(\beta-1)}.$$

Следствие 1.3. Если функция $f(z_1,z_2)\in MN_D(\alpha,\beta)$, то ее коэффициенты Тейлора удовлетворяют неравенствам [4, 30]

$$\left|a_{k_1,k_2}\right| \le (|k|+1)\frac{1-\beta}{d_{k_1,k_2}(D)}(1+\alpha),\ |k|=1. \qquad (1.22)$$

Теорема 1.6. Если $f(z_1,z_2)\in MN_D(\alpha,\beta)$, $\alpha\in R_+$, $0\le\beta<1$, то для любой точки $z\in D$ в $\overline{D}_r = r\overline{D}$ справедливы оценки:

$$\left|f(z_1,z_2)\right|^{1-\alpha}\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|^{\alpha} \le \frac{\left[\left(\dfrac{(1+r)}{1-r}\right)\right]^{\frac{(1-\beta)\alpha}{2}}}{(1-r^2)^{1-\beta}}, \qquad (1.23)$$

$$\left|f(z_1,z_2)\right|^{1-\alpha}\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|^{\alpha} \ge (1+ar+r^2)^{\beta-1} \qquad (1.24)$$

где

$$a=\left|a_{k_1,k_2}\right|\frac{(1+\alpha)}{(1-\beta)},\ k_1+k_2=|k|=1.$$

Следствие 1.4. Для функций $f(z_1,z_2)\in MN_{K^2_{1,\sigma}}(\alpha,\beta)$, $\alpha\in R_+$, $0\le\beta<1$ в $K^2_{1,\sigma}$ имеют место оценки:

$$\left|f(z_1,z_2)\right|^{1-\alpha}\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|^{\alpha} \le \frac{\left[\left(\dfrac{1+\omega(|z_1|,|z_2|)}{1-\omega^2(|z_1|,|z_2|}\right)\right]^{\frac{(1-\beta)\alpha}{2}}}{(1-\omega^2(|z_1|,|z_2|))^{1-\beta}}$$

$$\left|f(z_1,z_2)\right|^{1-\alpha}\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|^{\alpha} \ge \left[(1+a\omega(|z_1|,|z_2|)+\omega^2(|z_1|,|z_2|)\right]^{\beta-1}.$$

Следствие 1.5. Если функция $f(z_1,z_2)\in MN_{U^2_{R_1,R_2}}(\alpha,\beta)$, $\alpha\in R^1_+$, $0\le\beta<1$, то в $U^2_{R_1,R_2}$

$$\left|f(z_1,z_2)\right|^{1-\alpha}\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|^{\alpha} \le \frac{\left[\left(\dfrac{1+\gamma(|z_1|,|z_2|)}{1-\gamma(|z_1|,|z_2|}\right)\right]^{\frac{(1-\beta)\alpha}{2}}}{(1-\gamma^2(|z_1|,|z_2|))^{1-\beta}},$$

$$\left|f(z_1,z_2)\right|^{1-\alpha}\left|L_1 f(z_1,z_2)\right|^{\alpha} \ge \left[(1+a\gamma(|z_1|,|z_2|)+\gamma^2(|z_1|,|z_2|)\right]^{\beta-1}.$$

Следствие 1.6. Пусть функция $f(z)\in MN_D(0,0)\equiv M_D$, тогда в $\overline{D}_r$ справедливы неравенства $(1+r)^{-2}\le|f(z)|\le(1-r)^{-2}$.

Следствие 1.7. Для функции $f(z)\in MN_D(0,\beta)\equiv M_D(\beta)$ в $\overline{D}_r$ имеем оценку $(1+r)^{2(\beta-1)}\le|f(z)|\le(1-r)^{2(\beta-1)}$.

Следствие 1.8. Если функция $f(z)\in MN_D(1,0)\equiv N_D$, то в $\overline{D}_r$

$$(1+r)^{-2}\le|L_1 f(z)|\le(1-r)^{-2}$$

Следствие 1.9. Если функция $f(z)\in MN_D(1,\beta)\equiv N_D(\beta)$, $0\le\beta<1$, то в $\overline{D}_r$

$$(1+r)^{2(\beta-1)}\le|L_1 f(z)|\le(1-r)^{2(\beta-1)}.$$

Литература

1. Султыгов М.Д. О структурных формулах для некоторых классов голоморфных функций в пространстве $C^n, n>2$. // Актуальные проблемы современной науки. - № 3(82). - М. -2015. - С.175-180.
2. Баврин И.И. Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций.– М.-1976. – 99 с.
3. Султыгов М.Д. Усиленные оценки модуля функции и модуля оператора функции в классах функций Мокану. // Международный научный журнал (International Scientific Journal). II МНКП «Актуальные проблемы современной науки». - № 3. - 2015 - Москва-Будапешт-Вена.- С.36-39.

4. Султыгов М.Д. Эффективность коэффициентов Тейлора в некоторых областях Рейнхарта. // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук-№ 9(80). - М.-2015.-С.28-31