Усенов И.А. ©
К.ф.-м.н., доцент, Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына,
г. Бишкек, Кыргызстан

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЯВНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Аннотация

Многие прикладные задачи физики и геофизики сводятся к неявным операторным уравнениям первого рода. К таким уравнениям сводятся также обратные задачи математической физики в тех случаях, когда выражение для функции Грина неизвестно.

В данной работе предлагается комбинированный метод нового типа, объединяющий идеи метода М.М. Лаврентьева [1], метода Ньютона-Канторовича [2] для регуляризации решения неявного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: Регуляризация, неяный оператор, дифференциал Фреше, пространства гильберта.

Keywords: regularization, the implicit operator Frechet differential, Hilbert space.

В работе [5] рассмотрен случай, когда дифференциал Фреше нелинейного оператора является непрерывным самосопряженным положительным оператором. В данной работе комбинированного метода регуляризации применим с некоторым усложнением в более общих случаях.

1. **Постановка задач:**

Рассмотрим неявное нелинейное операторное уравнение первого рода относительно z вида

$$\Phi(z,u)=0\,, \tag{1}$$

где $\Phi: H\times H \to H$, H - гильбертово пространство.

Предполагаем, что

1) при $u=u^*$ существует единственное решение z^* уравнения (1), т.е. имеет место тождество

$$\Phi(z^*,u^*)\equiv 0\,, \tag{2}$$

2) оператор $\Phi(z,u)$ непрерывен в шаре $S(z_0,r_z)\times S(u_0,r_u)$, но $\Phi(z_0,u_0)\neq 0$ и имеет производную Фреше $\Phi_z'(z,u)$, непрерывную в точке (z_0,u_0). Линейный оператор $\Phi_z'(z_0,u_0)$ обратим, но неограничен, т.е. $\left\|\left[\Phi_z'(z_0,u_0)\right]^{-1}\right\|=\infty$.

Через $\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)$ обозначим оператор, сопряженный с оператором $\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)$. Известно, [4] что оператор $\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)$ также будет линейным и непрерывным.

Рассмотрим неявное операторное уравнение первого рода относительно z вида

$$\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^\alpha,u)=0\,. \tag{3}$$

Уравнения (1) и (3) является эквивалентными.

2. **Регуляризация решения задачи:**

В шаре $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))$ наряду с уравнениями (3) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z^{\alpha}+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^{\alpha},u)=0, \qquad (4)$$

где $\alpha>0$ - параметр регуляризации.

Теорема 1. Пусть 1. оператор $\alpha z+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z,u)$ непрерывен в шаре $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))\times S(u_0,r_u)$, где $\alpha\le\alpha_0$ и $\alpha z_\alpha(u_0)+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z_\alpha(u_0),u_0)\equiv 0$; 2. оператор $\alpha z+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z,u)$ имеет производную Фреше $\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z,u)$ непрерывную в точке $(z_\alpha(u_0),u_0)$; 3. линейный оператор $\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)$ непрерывно обратим.

Тогда существуют такие числа $\tilde r_z(\alpha),\tilde r_u>0$, что для каждого u из шара $S(u_0,\tilde r_u)$ уравнение (4) имеет в шаре $S(z_\alpha(u_0),\tilde r_z(\alpha))$ единственное, непрерывное решение $z^{\alpha}(u)$.

Прежде чем доказать *теорему1*, докажем следующую теорему

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2), а также 3) линейный оператор $\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)$ в шаре $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))\times S(u_0,r_u)$ удовлетворяет неравенству $\left\|\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\right\|\le M$ (5); 4) для оператора $\Phi_z'(z,u)$ имеет место условие Липшица

$$\left\|\Phi_z'(z,u)-\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u)\right\|\le N\|z-z_\alpha(u_0)\| \text{ в } S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))\times S(u_0,r_u); \qquad (6)$$

5) имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{r_z(\alpha)\to 0}\dfrac{r_z(\alpha)}{\alpha(r_z(\alpha))}=0$ (7).

Тогда существует такое число $\tilde r>0$, что при $r_z(\alpha)<\tilde r$ оператор $\Phi_3[\tau]\equiv\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)$, (где $0\le\tau\le1$, z - фиксированный элемент) в шаре $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))$ имеет обратный, ограниченный оператор.

Доказательство:

Производим преобразование оператора

$$\Phi_3[\tau]=\left(\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)(E+\Psi_1[\tau]), \qquad (8)$$

где $R_\alpha=\left(\alpha E+\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)^{-1}$,

$\Psi_1[\tau]=R_\alpha\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\left(\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)-\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)$.

Оператор $\Psi_1[\tau]$ при фиксированном z в шаре $S(z_\alpha(u_0),\tilde r_z(\alpha))$ является линейным оператором. Оценим его норму

$$\|\Psi_1[\tau]\|\le\frac{1}{\alpha}\tau MNr_z(\alpha)\le NM\,\frac{r_z(\alpha)}{\alpha}. \quad (9)$$

Из условия (7) следует, что существует число $\tilde r>0$, такое, что

$$NM\,\frac{r_z(\alpha)}{\alpha(r_z(\alpha))}<NM\,\frac{\tilde r}{\alpha(\tilde r)}=q_5\le\sigma \text{ при } r_z(\alpha)<\tilde r\text{, где } 0<\sigma<1/2. \qquad (10)$$

Тогда в силу теоремы Банаха [2] оператор $E+\Psi_1[\tau]$ обратим в шаре $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))$ и справедлива оценка

$$\left\|(E+\Psi_1[\tau])^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-q_5}. \qquad (11)$$

Таким образом, оператор $\Phi_3[\tau]$ имеет обратный оператор и справедлива оценка

$$\left\|(\Phi_3[\tau])^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-q_5}\cdot\frac{1}{\alpha}. \tag{12}$$

Теорема 2 доказана. Далее докажем теорему 1.

Уравнение (4) эквивалентно запишем в виде

$$z^\alpha = z^\alpha - (\Phi_3[\tau])^{-1}\left(\alpha z^\alpha + \Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^\alpha,u)\right). \tag{13}$$

Введем оператор

$$T_\alpha^*(z^\alpha,u) = z^\alpha - (\Phi_3[\tau])^{-1}\left(\alpha z^\alpha + \Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^\alpha,u)\right). \tag{14}$$

Преобразуя оператор (14), имеем

$$T_\alpha^*(z^\alpha,u) = (\Phi_3[\tau])^{-1}\left(\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\left(\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)z^\alpha - \Phi(z^\alpha,u)\right)\right). \tag{15}$$

Производная оператора (14) при $u=u_0$ имеет вид

$$T_\alpha^{*\prime}(z^\alpha,u_0) = (\Phi_3[\tau])^{-1}\left(\Phi_z'^{*}(z_\alpha(u_0),u_0)\left(\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0) - \Phi_z'(z^\alpha,u_0)\right)\right). \tag{16}$$

Оценим норму производного оператора

$$\left\|T_\alpha^{*\prime}(z^\alpha,u_0)\right\| \le \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| + \frac{q_5}{1-q_5} \tag{17}$$

Из оценки (17) следует, что $\forall z_1,z_2 \in S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))$ оператор $\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|\mathrm{T}_\alpha^*(z_1,u) - \mathrm{T}_\alpha^*(z_2,u)\right\| \le \left(\frac{q_5}{1-q_5} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\|\right)\left\|z_1 - z_2\right\|. \tag{18}$$

Оператор $\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u)$ является нелинейным оператором. Покажем, что он шар $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))$ отображает в себя. Для этого оценим разность $\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u) - z_\alpha(u_0)$

$$\left\|T_\alpha^*(z^\alpha,u) - z_\alpha(u_0)\right\| \le \left(\frac{q_5}{1-q_5} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\|\right)\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| + \frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}. \tag{19}$$

Введем обозначение

$$\eta = \frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}. \tag{20}$$

Квадратное уравнение имеет действительное решение

$$ht^2 - \frac{1-2q_5}{1-q_5}t + 1 = 0, \text{ где } h = \frac{N^2M^2}{2(1-q_5)^2\sigma^{\frac{1}{\sigma}}}\alpha^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}},\ \ \frac{1-2q_5}{1-q_5} > 0 \text{ при } q_5 < \frac{1}{2}, \tag{21}$$

если $h < \dfrac{(1-2q_5)^2}{4(1-q_5)^2}$, тогда минимальный корень имеет вид

$$t_1 = \frac{\dfrac{1-2q_5}{1-q_5} - \sqrt{\left(\dfrac{1-2q_5}{1-q_5}\right)^2 - 4h}}{2h}. \tag{22}$$

Если $t = t_1$, то оператор $T_\alpha^*(z^\alpha,u)$ при $\left\|u-u_0\right\| \le \tilde{r}_u$ шар $S(z_\alpha(u_0),t_1\eta)$ отображает в себя. Таким образом, для любого элемента z шара $S(z_\alpha(u_0),t_1\eta)$ имеет место неравенство

$$\left\|z - z_\alpha(u_0)\right\| \le t_1\frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha. \tag{23}$$

Покажем, что в шаре $S(z_\alpha(u_0), t_1\eta)$ оператор $T^*_\alpha(z^\alpha, u)$ является сжимающим оператором. Рассмотрим коэффициент Липшица в (18)

$$q_6 = \frac{q_5}{1-q_5} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| \le \frac{\frac{1}{1-q_5} - \sqrt{\left(\frac{1-2q_5}{1-q_5}\right)^2 - 4h}}{2} \le \frac{1}{2(1-q_5)}. \tag{24}$$

Учитывая (24) из (18), имеем

$$\left\|\mathrm{T}^*_\alpha(z_1, u) - \mathrm{T}^*_\alpha(z_2, u)\right\| \le q_6\left\|z_1 - z_2\right\|, \tag{25}$$

где $\frac{1}{2(1-q_5)} < 1$ при $q_5 < \frac{1}{2}$, следовательно $q_6 < 1$. Таким образом, оператор $T^*_\alpha(\cdot, u)$ является равномерно сжимающим оператором.

В силу принципа сжимающих отображений оператор $T^*_\alpha(z^\alpha, u)$ в шаре $S(z_\alpha(u_0), t_1\eta)$ имеет неподвижную точку, следовательно, уравнение (13) имеет единственное непрерывное решение z^α для каждого u, $\left\|u - u_0\right\| \le \tilde{r}_u$ удовлетворяющее неравенству

$$\left\|z^\alpha(u) - z_\alpha(u_0)\right\| \le t_1\frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha, \text{ где } \quad \tilde{r}_z(\alpha) = t_1\frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha. \tag{26}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 3. Пусть 1) выполняются все условия *теоремы 1*; 2) между элементами $z_\alpha(u_0)$ и z^* имеет место оценка $\left\|z^* - z_\alpha(u_0)\right\| \le \gamma r_z(\alpha)$, где $0 < \gamma < ½$. Тогда единственное непрерывное решение $z^{\alpha,*}$ уравнения (13) сходится по норме пространства H к точному решению z^* уравнения (1) при $\alpha \to 0$.

Доказательство. Используя неравенство треугольника, неравенство (26) при $u = u^*$ и второе условие *теорема3*, оценивая норму разности $\left\|z^{\alpha,*} - z^*\right\|$, имеем

$$\left\|z^{\alpha,*} - z^*\right\| \le \left\|z^{\alpha,*} - z_\alpha(u_0)\right\| + \left\|z^* - z_\alpha(u_0)\right\| \le (1+\gamma)t_1\frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha. \tag{27}$$

Из неравенства (27) следует, что $z^\alpha(u^*) \to z^*$ ïðè $\alpha \to 0$ по норме пространства H. Таким образом, решение $z^\alpha(u^*)$ уравнения (13) при $u = u^*$ является приближенным решением уравнения (1). *Теорема 3* доказана.

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.-1969.
3. Саадабаев А.С. Сходимость метода Ньютона в нелинейных некорректных задачах // Известия Вузов № 1-2, Бишкек-2003.
4. Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова Функциональный анализ в нормированных пространствах.
5. Усенов И.А. Регуляризация решения неявного операторного уравнения первого рода / «Функциональный анализ и его приложения», Астана-2012г.