Лебедев И.А.[1]**, Яковлева А.А.**[2] ©
[1]Доцент кафедры высшей математики, кандидат физико-математических наук;
[2]доцент кафедры высшей математики, кандидат физико-математических наук.
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В данной работе мы рассматриваем некоторые случаи понижения порядка обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, дифференциал, интегрирующий множитель.

Keywords: differential equation, differential, integrating factor.

Если обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой дифференциал от уравнения первого порядка

$$\Phi(x, y, y') = C\,, \tag{1}$$

то это уравнение второго порядка имеет вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\cdot y''+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0. \tag{2}$$

Таким образом, если уравнение имеет вид (2), то его порядок можно понизить, приведя к уравнению (1).

Рассмотрим приведенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''+a\cdot y'+b=0\,, \tag{3}$$

где $a=a(x,y,y')$ и $b=b(x,y,y')$. Уравнение (3) можно привести к виду (3) с помощью интегрирующего множителя $\mu=\mu(x,y,y')$, то есть записать

$$\mu\cdot y''+\mu\cdot a\cdot y'+\mu\cdot b=0\,, \tag{4}$$

$$\text{где } \mu=\frac{\partial\Phi}{\partial y'},\;\; \mu\cdot a=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\;\; \mu\cdot b=\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \tag{5}$$

Выражение (4) является полным дифференциалом при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mu a}{\partial x}=\dfrac{\partial\mu b}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial\ln\mu}{\partial x}\cdot a+\dfrac{\partial a}{\partial x}=\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial y}\cdot b+\dfrac{\partial b}{\partial y}; & (6)\\ \dfrac{\partial\mu a}{\partial y'}=\dfrac{\partial\mu}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial\ln\mu}{\partial y'}\cdot a+\dfrac{\partial a}{\partial y'}=\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial y}; & (7)\\ \dfrac{\partial\mu b}{\partial y'}=\dfrac{\partial\mu}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial\ln\mu}{\partial y'}\cdot b+\dfrac{\partial b}{\partial y'}=\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial x}. & (8)\end{cases}$$

Подставляя выражения для $\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial y}$ из (7-8) в (6), получаем необходимое условие для коэффициентов уравнения (3):

$$b\cdot\frac{\partial a}{\partial y'}+\frac{\partial b}{\partial y}=a\cdot\frac{\partial b}{\partial y'}+\frac{\partial a}{\partial x}\,. \tag{9}$$

При выполнении (9) интегрирующий множитель определяется по (7-8). Отметим, что при выполнении условия (9)

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(b\cdot\frac{\partial a}{\partial y'}+\frac{\partial b}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y'}\left(a\cdot\frac{\partial b}{\partial y'}+\frac{\partial a}{\partial x}\right)\text{, и, следовательно,}$$

$$b\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial y'\partial y}=a\cdot\frac{\partial^2 b}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y'\partial x}. \qquad (10)$$

Рассмотрим специальный случай, когда

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y'}=0, \qquad (11)$$

то есть когда $\mu=\mu(x,y)$. По (7-8) и(10) получаем, что в этом случае

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 b}{\partial y'^2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial y'\partial y}=\frac{\partial^2 a}{\partial y'\partial x} \qquad (12)$$

Следовательно, при выполнении условий (9) и (11) из выражений (7-8), получаем $\frac{\partial^2 \ln\mu}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \ln\mu}{\partial y\partial x}$, и выполняются условия полного дифференциала для $\ln\mu$. Так как по (7-8)

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y'}=\frac{\partial a}{\partial y'} \text{ и } \frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y'},$$

то получаем

$$\ln\mu=\int_{x_0}^{x}\left.\frac{\partial b}{\partial y'}\right|_{y=y_0}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial a}{\partial y'}dy \qquad (13)$$

Таким образом, можем найти интегрирующий множитель $\mu=e^{\ln\mu}$ и в силу выполнения условий полного дифференциала (6-8) по формуле (5) восстанавливаем функцию Φ:

$$\Phi(x,y,y')=\int_{x_0}^{x}(\mu\cdot b)\Big|_{y_0,y'_0}dx+\int_{y_0}^{y}(\mu\cdot b)\Big|_{y'_0}dy+\mu\cdot y'$$

и получаем уравнение первого порядка $\Phi(x,y,y')=C$. Отметим, что в этом специальном случае (11) по (7-8) имеем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial a}{\partial y'}=\alpha(x,y) \quad \Rightarrow \quad a=\alpha(x,y)\cdot y'+\alpha_1(x,y);\\ \dfrac{\partial b}{\partial y'}=\beta(x,y) \quad \Rightarrow \quad b=\beta(x,y)\cdot y'+\beta_1(x,y);\end{cases}$$

и, кроме того, по (9) имеем необходимое условие

$(\beta\cdot y'+\beta_1)\cdot\alpha+\frac{\partial\beta}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial\beta_1}{\partial y}=(\alpha\cdot y'+\alpha_1)\cdot\beta+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot y'+\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}$, и следовательно,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\beta}{\partial y}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial x};\\ \beta_1\cdot\alpha+\dfrac{\partial\beta_1}{\partial y}=\alpha_1\cdot\beta+\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x}.\end{cases} \qquad (15)$$

Очевидно, верно и обратное, то есть этот специальный случай (11) соответствует линейным относительно y' коэффициентам (14) в уравнении (3), которые удовлетворяют условиям (15). При этом порядок уравнения понижается до линейного относительно y'. Отметим, что этот специальный случай (11) является новым [1-2].

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971
2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М., 1993