

Смирнов А.В. ©

Доцент, к.т.н., кафедра телекоммуникационных систем,  
Московский технологический университет (МИРЭА)

## О ВЛИЯНИИ НУЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ОПТИМИЗИРОВАННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

### *Аннотация*

*Исследуются возможности одновременной оптимизации нескольких показателей качества, характеризующих АЧХ и ФЧХ, в случаях, когда передаточная функция электрического фильтра не имеет нулей передачи, имеет нули только на мнимой оси, в левой, в правой, или в обеих половинах комплексной плоскости. Для оптимизации применяется метод численного поиска глобального экстремума мультимодальной целевой функции.*

**Ключевые слова:** электрический фильтр, передаточная функция, оптимальность по Парето, нуль передачи.

**Keywords:** electrical filter, transfer function, Pareto optimality, transfer zero.

Синтез электрических фильтров с оптимальными по каким-либо показателям качества (ПоК) характеристиками является одной из основных задач теории электрических цепей. Возможности аналитического решения таких задач ограничены. В связи с этим применение для поиска решений численных методов и компьютеров является предметом исследований на протяжении уже более полувека [1, 7; 2]. Численные методы могут не только использоваться при решении конкретных задач, но и помогать находить ответы на общие вопросы. Один из таких вопросов - влияние количества и расположения нулей передаточной функции (ПФн) на АЧХ и ФЧХ фильтра.

ПФн электрического фильтра, построенного на элементах с сосредоточенными параметрами, имеет вид

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}, \quad (1)$$

где  $N(p)$  и  $D(p)$  - полиномы степеней  $n_N$  и  $n_D$ , корни которых являются, соответственно, нулями и полюсами ПФн. Можно с уверенностью предположить, что увеличение степени одного из полиномов при фиксированном значении степени другого полинома приведет к улучшению потенциально достижимых ПоК фильтра. Но ответ на вопрос, что даст большее улучшение - увеличение числа полюсов или увеличение числа нулей, неочевиден.

Далее, для обеспечения физической реализуемости ПФн все ее полюсы должны находиться в левой полуплоскости комплексной частоты  $p$ . Что касается нулей, то они могут располагаться по всей комплексной плоскости, но особенности их расположения влияют на характеристики цепи. Для минимально-фазовой цепи, все нули ПФн которой находятся в левой полуплоскости, АЧХ и ФЧХ связаны преобразованием Гильберта [3, 63-69]. Поэтому такие ПоК, как неравномерность АЧХ в полосе пропускания и максимальное значение АЧХ в полосе задерживания с одной стороны, и нелинейность ФЧХ или неравномерность длительности задержки сигнала в полосе пропускания с другой стороны, оказываются взаимосвязанными, а возможности одновременного улучшения этих ПоК - ограниченными [4].

В случае неминимально-фазовой цепи, по меньшей мере, часть нулей ПФн которой расположены в правой полуплоскости, указанная связь АЧХ и ФЧХ отсутствует. Поэтому следует ожидать более широких возможностей одновременного улучшения ПоК,

относящихся к АЧХ и к ФЧХ, по сравнению с минимально-фазовыми цепями с такими же степенями числителя и знаменателя ПФн [5]. Однако оценка наличия и величины такого улучшения аналитическими методами не получена.

Вопрос о влиянии нулей на ПоК имеет большое практическое значение, так как связан со сложностью реализации фильтра. Так, в случае пассивных цепей с сосредоточенными параметрами, ПФн, имеющая только полюса, а также, при выполнении некоторых дополнительных условий [6], имеющая нули только на мнимой оси, может быть реализована простой лестничной схемой [3, 167-172]. Если же нули расположены в произвольных точках комплексной плоскости, схемная реализация значительно усложняется [7, 92-100]. Это относится и к активным фильтрам [8, 160-166].

Цель данной работы - сравнить ПФн с различными количествами полюсов и нулей и различным расположением нулей по совокупности ПоК, характеризующих АЧХ и ФЧХ фильтра.

Сформулируем правило сравнения. Пусть количество используемых ПоК равно  $M$ . Обозначим  $\Pi = \{\Pi_1 \dots \Pi_M\}$  - вектор значений ПоК,  $\Sigma$  -  $M$ -мерное пространство векторов  $\Pi$ . Будем определять все ПоК так, чтобы улучшению качества соответствовало уменьшение значения ПоК.

Решение задачи оптимизации по нескольким ПоК основано на понятии оптимальности по Парето. Применительно к нашему случаю, оптимальными по Парето будут такие ПФн, для которых изменение координат полюсов и/или нулей или, что эквивалентно, изменение коэффициентов в числителе и/или знаменателе выражения (1), приводящее к улучшению одного из ПоК, приводит к ухудшению, по меньшей мере, одного из остальных ПоК. Точки  $\Pi$ , соответствующие оптимальным в указанном смысле ПФн, образуют в пространстве  $\Sigma$  гиперповерхность - фронт Парето (ФП).

Определим состав полюсов и нулей ПФн (кратко - состав ПФн) как набор параметров

$$\Phi = (P \ I \ L \ R), \quad (2)$$

где  $P$  - число полюсов,  $I$  - число нулей на мнимой оси,  $L$  и  $R$  - количества нулей, соответственно, в левой и правой половинах комплексной плоскости. Для каждого состава ПФн  $\Phi_1$  может быть получено множество оптимальных по Парето ПФн, которые имеют один и тот же состав  $\Phi_1$ , но различаются координатами полюсов и нулей и значениями ПоК. В пространстве  $\Sigma$  этому множеству ПФн соответствует ФП. Для получения однозначного результата сравнения ПФн с разными составами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  необходимо, во-первых, сравнивать оптимальные по Парето ПФн, во-вторых, сравнение должно выполняться по одному ПоК при равных значениях остальных ПоК.

Пусть  $\Pi_k$  - ПоК, по которому выполняется сравнение. Обозначим  $\Sigma'$  -  $(M-1)$ -мерное пространство значений остальных ПоК. Установим, что ПФн с составом  $\Phi_1$  лучше ПФн с составом  $\Phi_2$  по  $\Pi_k$  при изменении остальных ПоК в пределах области  $\Lambda' \subset \Sigma'$ , если для любой точки  $\Pi' \in \Lambda'$  выполняется неравенство  $\Pi_{k1} < \Pi_{k2}$ , где  $\Pi_{k1}$  и  $\Pi_{k2}$  соответствуют точкам ФП ПФн с составами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , координаты которых по остальным ПоК совпадают с координатами  $\Pi'$ . Наглядно можно представить, что ФП ПФн с составом  $\Phi_1$  расположен ближе к гиперплоскости  $\Pi_k = 0$ , чем ФП ПФн с составом  $\Phi_2$  в пределах области  $\Lambda'$  изменения остальных ПоК.

Таким образом, для сравнения ПФн с составами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  необходимо построить соответствующие им ФП в пространстве показателей качества  $\Sigma$ . Методика решения этой задачи была изложена в статье [9].

В данной работе, как и в [9], рассматриваются аппроксимации ПФн ФНЧ-прототипов вида (1) с переходом к нормированной частоте

$$F = f / f_p, \quad (3)$$

где  $f_p$  - верхняя граничная частота полосы пропускания (ПП), которой соответствует нормированная частота  $F_p = 1$ . За нижнюю границу полосы задерживания (ПЗ) во всех случаях было принято значение  $F_s = 2$ . В качестве ПоК использовались следующие три величины:

- неравномерность АЧХ в ПП  $DH_p$  дБ;
- максимальное значение АЧХ в ПЗ  $H_s$  дБ;
- максимальное отклонение длительности задержки от ее среднего значения в пределах ПП  $DT_d$  %.

Такой выбор ПП, ПЗ и трех ПоК соответствует определениям, использованным в широко известных руководствах по теории электрических фильтров [3, 256; 7, 62-66; 10, 69-72]. Набор ПоК может быть и другим, например, более детально учитывающим поведение АЧХ и ФЧХ в полосе перехода. При этом полученные ниже результаты могут измениться.

ФП для заданного состава ПФн получается в виде набора точек, каждая из которых является результатом поиска минимально достижимого значения  $DT_d$  при заданных значениях  $DH_p$  и  $H_s$ . Вид минимизируемой целевой функции (ЦФ) аналогичен приведенному в [9]:

$$G_F = W_p \cdot \left| \frac{S_p - S_{pt}}{S_{pt}} \right| + W_s \cdot \left| \frac{S_s - S_{st}}{S_{st}} \right| + W_D \cdot \lg(S_D \cdot M_D) + S_T. \quad (4)$$

Индекс  $t$  (*target*) отмечает задаваемое значение показателя. Значения переменных  $S_p$ ,  $S_s$ ,  $S_D$ ,  $S_T$ , весовых коэффициентов  $W_p$ ,  $W_s$ ,  $W_D$  и масштабирующего множителя  $M_D$  рассчитываются или задаются на основании правил, приведенных в [9]. Переход от определенных выше ПоК к величинам  $S_p$ ,  $S_s$ ,  $S_D$  и обратно осуществляется в соответствии с равенствами

$$\begin{aligned} DH_p &= 20 \lg \frac{2 + S_p}{2 - S_p}; \\ H_s &= 20 \lg S_s; \\ DT_d &= S_D \cdot 100\%. \end{aligned} \quad (5)$$

Оптимизация ЦФ заключается в поиске ее глобального минимума в пространстве координат полюсов и нулей ПФн. Ограничения на область поиска, связанные с требованием физической реализуемости ПФн и с требованиями на расположение ее нулей, учитываются при задании координат на каждом шаге поиска. Такой подход значительно упрощает вычисления по сравнению с поиском в пространстве коэффициентов числителя и знаменателя ПФн, при котором требуется сложная проверка допустимости получаемых решений. В экспериментах использовался алгоритм оптимизации, включающий многократный случайный выбор начальной точки с последующим пошаговым поиском локального минимума. Результатом оптимизации является наименьший из всех найденных локальных минимумов.

Как показали эксперименты, ЦФ (4) по характеристикам рельефа значений (*fitness landscape*), определения которых даны, например, в [11], относится к мультимодальным с большим количеством локальных минимумов и слабо выраженными глобальными закономерностями их значений. Вероятность найти глобальный минимум при сложном рельефе мала, поэтому находимые решения являются, как правило, лишь достаточно хорошими локальными минимумами, которые можно улучшить, продолжая поиск.

В ходе экспериментов для получения каждой точки ФП выполнялось 1000 циклов локального поиска. В зависимости от суммарного количества полюсов и нулей ПФн это занимало от 1 до 10 минут на компьютере с процессором Intel Core 2, 1,87 ГГц, ОЗУ 2 ГБ. Уменьшения затрат времени, вероятно, можно достичь, используя какой-либо более совершенный алгоритм из числа занявших высокие места в сравнительных испытаниях [12] для ЦФ с аналогичными свойствами.

Для получаемых оптимальных ПФн выполнялась проверка реализуемости пассивным четырехполюсником без потерь, нагруженным по входу и выходу на активные сопротивления. Первый шаг проверки - определение соотношения сопротивлений источника сигнала  $R_r$  и нагрузки  $R_n$ , при котором данная ПФн может быть получена в пассивной цепи. Поиск в каждом случае начинался с  $R_r / R_n = 1$  и продолжался в сторону уменьшения этого отношения, пока не выполнялось условие реализуемости [3, 190-195]. Второй этап проверки

состоял в получении выражения для входного сопротивления  $Z_{вх}$ , реализующего эту ПФн четырехполюсника, нагруженного на  $R_n = 1$  Ом, и проверки соответствия  $Z_{вх}$  критериям положительности и вещественности [3, 91-96]. Наконец, на третьем этапе, выполнявшемся только в случае расположения всех нулей на мнимой оси, проверялось выполнение условий реализуемости лестничной схемой [6].

Несколько неожиданным результатом экспериментов оказалось, что, во-первых, все находимые оптимальные ПФн реализуемы пассивными цепями при вполне приемлемом диапазоне значений отношения  $R_r / R_n$  от 1 до 0,15; во-вторых, все находимые оптимальные ПФн с нулями на мнимой оси реализуемы лестничными  $LC$  схемами.

Что касается реализуемости ПФн активными фильтрами, то она обеспечивается автоматически, так как в процессе поиска полюсы ПФн могут находиться только в левой полуплоскости.

Рассмотрим результаты экспериментов для нескольких характерных случаев (рис.1 и рис.2). Результаты представлены сериями точек на плоскости  $(DH_p, DT_d)$  для диапазона значений от 0,1 дБ до 5 дБ при  $H_s = -25$  дБ и  $H_s = -40$  дБ. Состав (2) полюсов и нулей ПФн для каждой серии показан в легенде к графикам.

Как видно из рис.1, для ПФн 4-го порядка с  $H_s = -25$  дБ введение двух нулей уменьшает значения ПоК  $DT_d$  не больше, чем введение двух дополнительных полюсов, а при значениях ПоК  $DH_p < 0,5$  дБ, не больше, чем введение одного дополнительного полюса. При этом расположение нулей в правой полуплоскости дает даже меньший эффект, чем их расположение на мнимой оси или в левой полуплоскости.

В случае  $H_s = -40$  дБ введение двух нулей дает больший эффект, чем введение одного полюса, но меньший по сравнению с двумя дополнительными полюсами ПФн. При этом расположение нулей не влияет на результат.

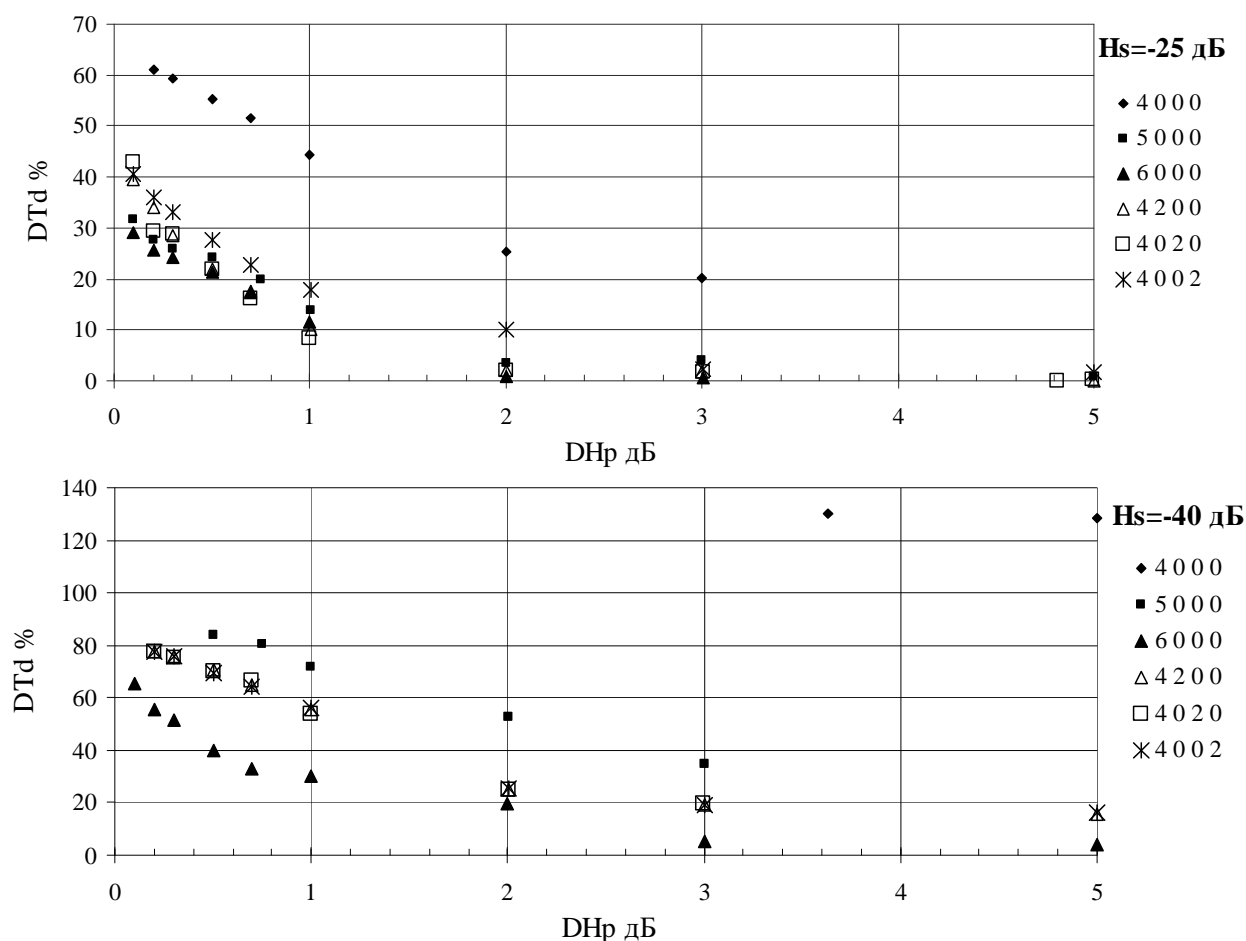


Рис.1. Результаты для фильтров порядка с 4-го по 6-й

Результат введения двух пар нулей в фильтр 6-го порядка (рис.2) при  $H_s = -25$  дБ зависит от их расположения. Нули на мнимой оси или только в левой полуплоскости дают меньший эффект, чем введение не только четырех, но и меньшего числа дополнительных полюсов. В то же время, размещение одной и, тем более, обеих пар нулей в правой полуплоскости, то есть переход к неминимально-фазовой ПФн, создает выигрыш по сравнению с дополнительными полюсами.

В случае  $H_s = -40$  дБ меньший эффект от нулей на мнимой оси и в левой полуплоскости по сравнению с дополнительными полюсами по-прежнему заметен. Однако и нули в правой полуплоскости не дают выигрыша относительно простого увеличения порядка фильтра за счет полюсов.

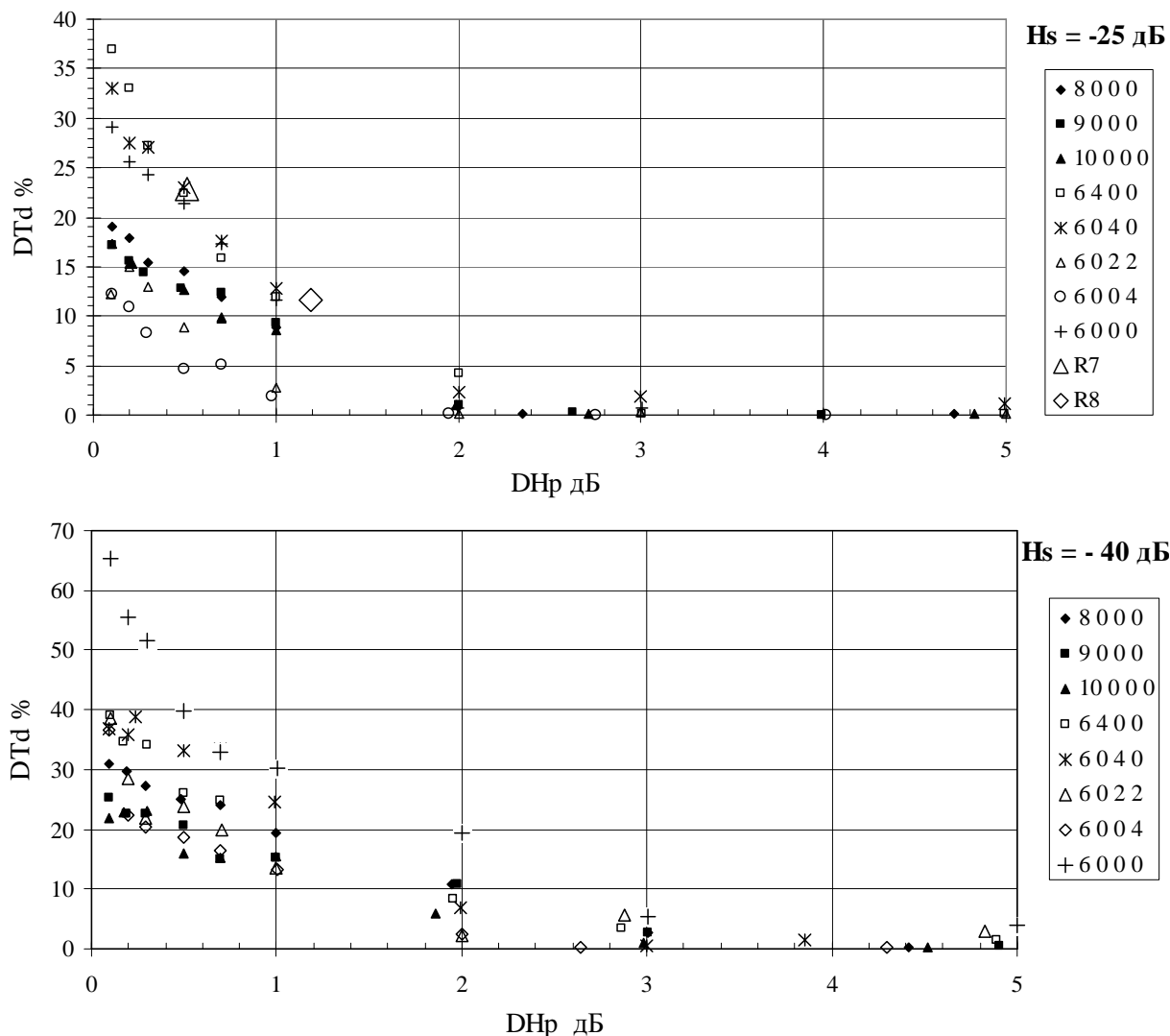


Рис.2. Результаты для фильтров порядка с 6-го по 10-й

Следует отметить, что, так как никакие серии точек на рис.1 и рис.2 не пересекаются, то выводы, аналогичные приведенным выше, справедливы и для сравнения фильтров по ПоК  $DH_p$  при заданных ПоК  $H_s$  и  $DT_d$ .

Таким образом, в разных случаях влияние количества и расположения нулей ПФн на ПоК, характеризующие АЧХ и ФЧХ, оказывается различным. Сделать однозначный вывод, что неминимально-фазовые ПФн позволяют получать лучшие значения одновременно всех этих ПоК, не представляется возможным. Поэтому для обоснованного выбора состава полюсов и нулей ПФн, обеспечивающей получение заданных ПоК, необходим анализ

различных вариантов. Такой анализ может быть выполнен с использованием описанной выше методики и реализующего ее программного обеспечения.

Интерес представляет также сравнение ПоК для ПФн, полученных с помощью численного поиска, с ПоК для ПФн, найденных аналитически. В табл. 1 приведены параметры состава и значения ПоК для ПФн, приведенных в [10, 121-140], наиболее глубоко из известных автору исследованию аналитическими средствами возможностей одновременного получения заданных ПоК АЧХ и ФЧХ. Следует пояснить, что нечетные значения  $L$  и  $R$  означают, что помимо пар комплексно-сопряженных нулей, есть еще пара вещественных нулей симметричных относительно мнимой оси.

Таблица 1

	$P$	$I$	$L$	$R$	$DH_p$ дБ	$H_s$ дБ	$DT_d$ %
1	4	0	1	1	6,57	-21,9	47,9
2	6	0	2	2	6,42	-24,6	40,0
3	8	0	3	3	6,34	-26,8	35,3
4	4	0	1	1	2,13	-20,8	28,5
5	6	0	2	2	3,78	-23,9	18,8
6	8	0	3	3	4,48	-26,3	21,5
7	5	0	1	1	0,51	-20,4	22,8
8	7	0	3	3	1,19	-21,1	11,6

На рис.2 для  $H_s = -25$  дБ показаны точки  $R7$  и  $R8$ , соответствующие последним строкам табл.1. Эти точки находятся примерно на уровне ФП для состава ПФн (6 0 0 0), но ПоК  $H_s$  у них хуже на 4 - 4,5 дБ. Остальные точки из табл.1 окажутся на графике значительно выше этого ФП. Это показывает, что результаты численного поиска существенно превосходят ПФн, найденные аналитически. Этот вывод справедлив, конечно, для использованного набора ПоК, и может измениться при других критериях оценки АЧХ и ФЧХ.

Изложенные результаты показывают, что применение современных методов позволяет расширить наши знания и возможности в таких, казалось бы, давно изученных областях, как теория электрических фильтров.

### Литература

1. А.А. Ланнэ. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. М.: Связь, 1969, 294 с.
2. S. Wen, L. Zhu - Numerical synthesis design of coupled resonator filters // Progress In Electromagnetics Research, 2009. Vol. 92, 333-346.
3. Г. Лэм. Аналоговые и цифровые фильтры: Пер. с англ. М.: Мир, 1982, 590 с.
4. H.J. Carlin, J. Wu - Amplitude selectivity versus constant delay in minimum-phase lossless filters // IEEE Transactions on Circuits and Systems. Jul 1976. Vol.23, No.7, P. 447 - 455.
5. S.O. Scanlan, H. Baher, - Filters with maximally flat amplitude and controlled delay responses // IEEE Transactions on Circuits and Systems. May 1976. Vol.23, No.5, P. 270 - 278.
6. A.D. Fialkow - Inductance, capacitance networks terminated in resistance // IEEE Transactions on Circuits and Systems. Aug 1979. Vol.26, No.8, P.603-641.
7. Современная теория фильтров и их проектирование / Под ред. Г. Темеша и С. Митра: Пер. с англ. М.: Мир, 1977, 560 с.
8. Л.П. Хьюлсман, Ф.Е. Аллен. Введение в теорию и расчет активных фильтров: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1984, 384 с.
9. А.В. Смирнов - Оптимальные по Парето аппроксимации передаточных функций электрических фильтров // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. Май 2015. №05 (76). Часть 1, С.74-78.
10. Дж.Д. Роудз. Теория электрических фильтров: Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1980, 240 с.
11. O. Mersmann, M. Preuss, H. Trautmann - Benchmarking evolutionary algorithms: Towards exploratory landscape analysis // Parallel Problem Solving from Nature - PPSN XI, Springer, 2011, P. 73 - 82.
12. A. Auger, N. Hansen, V. Heidrich-Meisner, O. Mersmann, P. Posik, M. Preuss - GECCO 2012 Workshop on Black-Box Optimization Benchmarking (BBOB), 2012.