НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КЛАССАМИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Султыгов М.Д. ©
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики,
Ингушский государственный университет

Аннотация

Приводятся новые результаты, как дополнение к известным ранее работам по проблемам вложения классов голоморфных функций и экстремальным проблемам, вкупе с многомерным аналогом проблемы Л. Бибербаха. Главной идеей исследования является демонстрация зависимости новых классов голоморфных функций от функций класса Шура.

Ключевые слова: Голоморфные функции, класс Шура, звездные функции, обобщенно однолистные функции, функции с ограниченным вращением, обобщенный класс звездных функций, класс звездных функций порядка α и типа β.

Summary

We present new results in addition to the previously known work on attachment classes of holomorphic functions and extremal problems, coupled with the multidimensional analog of the problem of L. Bieberbach. The main idea of the study is to demonstrate the dependence of new classes of holomorphic functions from the Schura class.

Keywords: Holomorphic functions, Schura class, star functions, a generalization of univalent functions with bounded rotation, a generalized class of star functions, the class of the star functions of order α and type β.

Вслед за А.А. Темляковым [1] к вопросам геометрической теории обратились И.И. Баврин [2], И.А. Александров [3] и ряд зарубежных математиков [4]-[24].

Наиболее фундаментальные результаты в геометрической теории многомерного комплексного анализа получены И.И. Бавриным [25]-[35]. При получении своих результатов И.И. Баврин существенно использовал интегральные представления и операторы А.А. Темлякова.

Данная статья является дополнением к ранее известным работам по проблемам вложения классов голоморфных функций и экстремальным проблемам [1]-[38] и вкупе с многомерным аналогом проблемы Л. Бибербаха составляет единое целое. Главной идеей исследования является демонстрация зависимости новых классов голоморфных функций от функций класса Шура $S_D(0)$, $f(0,0) = 0$, $|f(z_1, z_2)| < 1$ в области D, который достаточно полно изучен.

Пусть D – ограниченная полная двоякокруговая область с центром в точке (0;0), то есть D – звездная (а, следовательно, и звездообразная) относительно начала координат область в пространстве C^2; функция $F(w,z)$ голоморфна в области D, $F(0,0) = 1$, k и k_1 – фиксированные комплексные числа. Проекцию сечения $D \cap \{z = kw\}$ $(D \cap \{w = k_1 z\})$ на плоскость $z = 0$ $(w = 0)$ называют соответствующим кругом. Говорят [2], что в сечении $D \cap \{z = kw\}$ функция $wF(w,z)$ однолистна, звездно однолистна по отношению к началу координат (выпукло однолистна), является функцией с ограниченным вращением, если в соответствующем круге функция $wF(w,kw)$ соответственно [35] однолистна, однолистно отображает его на звездную область относительно начала координат (на выпуклую область), есть функция с ограниченным вращением в соответствующем круге.

Пусть далее Q_D, M_D, N_D, V_D– классы голоморфных в области D функций $F(w,z), F(0,0) = 1$ удовлетворяющих следующим условиям:

1) в сечении $D \cap \{z = kw\}$ функция $wF(w,z)$ соответственно однолистна, зведно однолистна по отношению к началу координат (выпукло однолистна), есть функция с ограниченным вращением;

2) в сечении $D \cap \{w = 0\}$ функция $zF(0,z)$соответственно однолистна, звездно однолистна по отношению к началу координат (выпукло однолистна), есть функция с ограниченным вращением.

Классы Q_D, M_D, N_D, V_D обобщенно однолистных функций введены И.И. Бавриным, им доказаны критерии принадлежности голоморфных функций к классам M_D, N_D, V_D, Y_D и найдены соотношения между функциями классов M_D, N_D, V_D, Шура и Каратеодори, а также получены следующие, в частности, результаты [2]:

1°. $N_D \subset M_D \subset R_D \subset Q_D$;

2°. $Y_D \subset V_D \subset R_D \subset Q_D$.

Указанные соотношения дополним следующими результатами [36]:

Теорема 1. $\forall D$: $Y_D \cap M_D \neq 0$.

Следствие 1. $\forall D$: $M_D \cap V_D \neq \emptyset$,
$\forall D$: $M_D \cap C_D(1) \neq \emptyset$,
$\forall D$: $M_D \cap C_D \neq \emptyset$,
$\forall D$: $M_D \cap P_D \neq \emptyset$.

Теорема 2. $\exists\, D$: $Y_D \neq N_D$.

Следствие 2. $\exists\, D$: $Y_D \neq V_D$.

Теорема 3. $\exists\, D$: $N_D \neq V_D$.

Теорема 4. $\forall D$: $N_D \cap C_D(1) \neq \emptyset$.

Следствие 3. $\forall D$: $N_D \cap C_D \neq \emptyset$.

Теорема 5. $\forall D$: $N_D \cap P_D \neq \emptyset$.

К этим результатам необходимо добавить следующие теоремы [37]:

Теорема 6. $\forall D$: $C_D \cap P_D \neq \emptyset$.

Теорема 7. $\forall D$: класс P_D не содержится в классе C_D.

Теорема 8. $\forall D$: класс C_D не содержится в классе P_D.

В [39]–[46] автором вводятся и исследуются обобщенный класс звездных функций $M_D(A,B)$,$-1 \leq B < A \leq 1$ и его подклассы [47]–[60].

Обобщенным классом звездных функций $M_D(A,B)$, $-1 \leq B \leq A \leq 1$,

назовем множество всех голоморфных в области $D \subset C^n$ функций $f(z_1, \dots z_n) = f(z)$ представимых рядом $f(z) = 1 + \sum_{|k|=1}^{\infty} a_k z^k$, где $|k| \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} k_i$, $k! \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} k_i!$ и удовлетворяющих условию [39]–[46]:

$$\frac{\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)} = \frac{1 + A\Theta(z)}{1 + B\Theta(z)}, \Theta(z) \in S_D(0)\,,$$

где $S_D(0)$ - класс голоморфных в области D функций Шура $f(z_1, z_2), f(0,0) = 0$, для которых $|f(z_1, z_2)| < 1$ в D [2].

Здесь

$$\mathcal{R}_\gamma[f(z)] = \gamma f(z) + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \quad [38].$$

Обратным к оператору $\mathcal{R}_\gamma[f(z\,)]$ является оператор $\mathcal{R}_\gamma^{-1} f(z) = \int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} f(\varepsilon z_1, \dots, \varepsilon z_n) d\varepsilon$.

Теорема 9. Для того чтобы $f(z) \in H(D \subset C^n)$ принадлежала классу $M_D(A,B)$ необходимо и достаточно, чтобы она имела представление

$$f(z) = exp(A - B) \int_0^1 \frac{\theta(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2)}{1 + B\theta(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2)} \cdot \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\,,$$

где $\theta(z_1,z_2) \in S_D(0)$ - класс голоморфных в области D функций Шура $f(z_1,z_2), f(0,0)=0$, для которых $|f(z_1,z_2)|<1$ в D [2].

Интересным является класс голоморфных функций $M_D\left(\frac{b^2-a^2+a}{b},\frac{1-a}{b}\right), a+b\geq 1, b\leq a\leq b+1$ $[39,40,47-49]$:

Теорема 10[39,40]. $f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k \in M_D\left(\frac{b^2-a^2+a}{b},\frac{1-a}{b}\right)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z_1,z_2)=exp\int_0^1 \frac{ch(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}{b+(1-a)h(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}\cdot\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

где $c=b^2-(a-1)^2$ и $h(z_1,z_2)\in S_D(0)$ для которых $|h(z_1,z_2)|\leq 1$ в D.

В работах [50-53] исследуются экстремальные вопросы оценки модуля оператора функции $\mathcal{R}_1 f(z_1,z_2)$ и многомерный аналог гипотезы Бибербаха для «близких» функций.

Большой интерес представляют звездные функции порядка α и типа β [39,40,54-56].

Определение. Классом $M_D(\alpha,\beta), 0\leq\alpha\leq 1, 0\leq\beta\leq 1$ назовем множество всех голоморфных в $D\subset C^n$ функций $f(z)$ вида (1) таких, что $F(z_k)=z_k f(l_1 z_k,\dots,z_k,\dots,l_n z_k)$, как функция переменного звездно z_k, однолистна порядка α и типа β в $D\cap P_{l[k]}$ а при $l_m=0$ функция $F(z_k)=z_k f(0,\dots,z_k,\dots,0)$ звездно однолистна порядка α и типа β в l_m и, следовательно, $f(z)$ удовлетворяет условию:

$$\left|\frac{\dfrac{L_0 lnf(z)}{f(z)}}{(2\beta-1)L_0 f(z)+1-2\beta\alpha}\right|<1$$

Теорема 11[39,40]**.** Функция $f(z)\in H(D\subset C^n)$ принадлежит классу $M_D(\alpha,\beta)$ тогда и только тогда, когда существует функция $F(z)\in S_D(0)$ такая, что

$$f(z_1,z_2)=exp\left\{2\beta(\alpha-1)\int_0^1\frac{F(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}{1+(2\beta-1)F(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}\cdot\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}.$$

Литература

1. Темляков А.А. Оценка коэффициентов // Ученые записки МОПИ. Т. 57 (1957). 25-27 с.
2. Баврин И.И. Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций. М.: Изд-во. МОПИ, 1976. 99 с.
3. Александров И.А. Некоторые оценки для голоморфных функций многих комплексных переменных // Сиб. мат. журнал. Т. 5. №1 (1964). С.3-13.
4. Michiwaki Y. Note on Some coefficients in starlike functions of two complex variables. // Res. Repts. Nagaoka Techn. Call. 1, №2 (1963), 151-153.
5. Higuchi T. On coefficients on holomorphic functions in several complex variables. // Sci. Rep. Tokyo. Kyoiku Daigaku, 8 (1965), 251-258.
6. Fukui L. On the estimates of cofficients of analitic functions. // Sci. Rep. Tokyo. Kyoiku Daigaku, 1969, 10, №261, 216-218.
7. Suffridge T.J. The principle of subordination applied to functions of several variables.// Pacific J. Math., 1970, vol.33, No 1, pp.241-248.
8. Pfaltzgraff J.A., Suffridge T.J. Close-to-starlike holomorphic functions of several variables. // Pacific J. Math., 1975, vol.57, No 1, pp.271-279.
9. Liczberski P. On a certain family of holomorphic functions of two complex variables. // ZNPL, Math, z 11, No 301, 1977, pp. 57-64.
10. Liczberski P. Extremal problems in certain classes of holomorphic functions of two complex variables. // ZNPL, Math, z 11, No 301, 1977, pp. 65-71.
11. Dobrowolska K., Dziubinski J. On starlike and convex functions of many variables. // Dem. Math., vol. 11, No 2, 1978, pp.545-555.
12. Pfaltzgraff J.A. Subordination shains and univalence of holomorphic mappings in C^n . // Math. Ann., vol. 210, 1974, pp.55-68.

13. Dziubinski J., Sitarski R. // On classes of holomorphic functions of many variables starlike and convex on some hipersurfages. // Dem. Math., vol. 13, No 3, 1980, pp.619-632.
14. Poreda T. Estimation of coefficients in generalized class of Caratheodory of two complex variables. // ZNPL, Math, z 13, No 353, 1981, pp. 99-104.
15. Poreda T. On some classes of holomorphic vector functions. // ZNPL, Math, z 13, No 353, 1981, pp. 91-97.
16. Michiwaki Y. On the Schwarzian Lemma in the vector space. // Res. Rep. Nagaoka Tech. Coll., vol. 44, No 1, 1973, pp.569-580.
17. Kikuchi K. Starlike and convex mappings in several complex variables. // Pacific J. Math., 1975, vol.57, No 1, pp.271-279.
18. Suffridge T.J. Starlike and convex maps Banach spaces. // Pacific J. Math., 1973, vol.46, No 2, pp.575-589.
19. Isao Ono. Starlikeness and convexity in several complex variables. // Sc. Rep. TKD. Sect. A, vol.9, No 212, 1966, pp.130-136.
20. Matsuno T. On starlike theorems and convexlike theorems in the complex vector space. // Sc. Rep. TKD. Sect. A, vol. 5, No 181, 1955, pp.88-95.
21. Higuchi T. On the distribution theorem of holomorphic mappings in several complex variables. // Sc. Rep. TKD. Sect. A, vol. 8, No 192, 1964, pp.99-121.
22. Higuchi T., Kanemaru T. On the value distribution of holomorphic mappings in several complex variables. // Sc. Rep. TKD. Sect. A, vol. 10, No 238, 1969, pp.44-58.
23. Janowski W. Some extremal problems for certain families of analytic functions. // Ann. Polon. Math. vol. 28, 1973, pp. 297-326.
24. Kaminski J. Some growth problems for certain α- convex functions. Dem. Math., vol. XII, №1, 1979, pp.211-230.
25. Баврин И.И. Оценки в теории аналитических функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. 126 №5 (1959). С.919-922.
26. Баврин И.И. Оценки коэффициентов Тейлора функций многих комплексных переменных // ДАН СССР. 131 №6, (1960). С.1231-1233.
27. Баврин И.И. О коэффициентах одного класса аналитических функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. 137 №3, (1961). С.495-498.
28. Баврин И.И. О некоторых классах аналитических функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. 143 №5 (1962). С.1011-1013.
29. Баврин И.И. О единственности экстремальных функций в оценке коэффициентов Тейлора ограниченных функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. 145 №6 (1962). С.1195-1198.
30. Баврин И.И. Критерии принадлежности регулярных функций к двум классам функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. 152 №2, (1963). С.255-258.
31. Баврин И.И. О некоторых оценках коэффициентов ограниченных голоморфных функции // ДАН СССР. 161 №3 (1965). С.503-506.
32. Баврин И.И. К оценкам в теории регулярных функций многих комплексных переменных // ДАН СССР. 163 №4 (1965). С.791-794.
33. Баврин И.И. О некоторых классах регулярных функций многих комплексных переменных // ДАН СССР. 163 №6 (1965). С.1303-1306.
34. Баврин И.И. О классах регулярных функций многих комплексных переменных // ДАН СССР. 174 №6 (1967). С.1247-1250.
35. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
36. Баврин И.И. Критерии принадлежности регулярных функций к двум классам функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. 152 №2, (1963). С.255-258.
37. Сечкин Г.И., Мищенко Г.В. Некоторые соотношения между классами голоморфных функций / Деп. в ВИНИТИ, 10.07.91, №2931-В91. 7 с.
38. Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. М. 1991.Издательство «Прометей», 200 с.
39. Султыгов М.Д. О структурных формулах для некоторых классов голоморфных функций в пространстве $C^n, n \geq 2$. // Актуальные проблемы современной науки. №3(82), Москва., 2015.С. 175-181.

40. Султыгов М.Д. Интегральные представления некоторых классов голоморфных функций в пространстве многих комплексных переменных. // Известия Чеченского государственного педагогического института. №2(10), Грозный, 2015. С.19-23.
41. Султыгов М.Д. Обобщенный класс звездных функций $M_D(A,B)$ в $C^n, n \geq 2$. // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук № 4-1 (87),Москва.,2016.С.38-44.
42. Султыгов М.Д. О точности оценок в обобщенных классах звездных функций многих комплексных переменных. // XI МНПК «Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире» .С-Петербург.2015.С.4-7.
43. Султыгов М.Д. Звездно-выпуклые функции в пространстве многих комплексных переменных. // В сборнике: Вузовское образование и наука. Региональная научно-практическая конференция. Магас. 2012.С. 141-151.
44. Султыгов М.Д. О некоторых задачах звездно-выпуклых функций многих комплексных переменных. // Всероссийская научно-практическая конференция. Школа, вуз: современные проблемы математики, информатики и физики. Чеченский государственный педагогический институт; Грозный ,2013.С. 37-44.
45. Султыгов М.Д. О точности звездно-выпуклых функций в пространстве $C^n, n \geq 2$. // Сборник научных трудов ИнгГУ,№11, Магас.,2014.С. 332-343.
46. Султыгов М.Д. Об эффективности коэффициентов Тейлора для функций двух комплексных переменных. // Актуальные проблемы современной науки. №4(83), Москва., 2015. С. 118-123.
47. Султыгов М.Д. Характеризация и экстремальные вопросы звездных функций порядка $a - b$. // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук № 5-1 (88),Москва., 2016.С.20-24.
48. Султыгов М.Д. О классе звездных функций порядка $a - b$ в пространстве двух комплексных переменных. // Высшая школа. Том №9, ч.2, Уфа.,2016. С.86-90.
49. Султыгов М.Д. Экстремальные вопросы звездных функций порядка $a - b$ в пространстве C^2. // Проблемы современной науки и образования. № 10(52), Москва.,2016. С.7-10.
50. Султыгов М.Д. Эффективность коэффициентов Тейлора в классе «близких» функций $N_D(A,B)$. // Актуальные проблемы современной науки. № 6-1 (89), Москва., 2016. С.25-30.
51. Султыгов М.Д. О точности оценки модуля оператора функции $\mathcal{R}_1 f(z_1, z_2)$ в классе «близких» функций $N_D(A,B)$. // Актуальные проблемы современной науки. 7-1 (90), Москва.,2016. С.
52. Султыгов М.Д. Усиленные оценки модуля оператора функции в классе близких функций $N_D(A,B)$. // Евразийский научный журнал. №5, С-Петербург., 2016. С. 96-100.
53. Султыгов М.Д. Многомерный аналог гипотезы Бибербаха для «близких» функций $N_D(A,B)$ в пространстве $C^n, n \geq 2$. // Высшая школа. Том №11,ч. 2, Уфа.,2016.
54. Султыгов М.Д. Эффективность достаточных условий в классе звездных функций порядка α и типа β в бикруге и гиперконусе. // НЦ «Олимп» VII МНКП «Современные тенденции в научной деятельности» Москва.2015.С.1333-1336.
55. Султыгов М.Д. Экстремальные вопросы в звездных функциях порядка α и типа β многих комплексных переменных. // Сборник научных трудов №12 ИнгГУ, Магас.,2015.С.192-199.
56. Султыгов М.Д. Звездные функции порядка α и типа β многих комплексных переменных.// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук №8(79). Москва., 2015. С.8-11.
57. Султыгов М.Д. Аналоги гипотезы Бибербаха в C^2 областях $D_{p,q} \in (T)$. // Проблемы современной науки и образования. № 1(43),Москва.,2016. С.20-22.
58. Султыгов М.Д. Эффективность коэффициентов Тейлора в некоторых областях Рейнхарта.// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. № 9(80). Москва., 2015. С.28-31.
59. Султыгов М.Д. Зависимость коэффициентов Тейлора от радиусов параметризации границ областей Рейнхарта.// Альманах современной науки и образования.№ 9(99),Тамбов, 2015. С. 122-128.
60. Султыгов М.Д. Об эффективности коэффициентов Тейлора для функций двух комплексных переменных.// Актуальные проблемы современной науки. №4(83). Москва, 2015. С.118-123.