ОПЕРАТОРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ БАЗИЛЕВИЧА

Султыгов М.Д. ©
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики,
Ингушский государственный университет

Аннотация

Найдены критерии принадлежности голоморфных функций к классам Базилевича: $B_D(\lambda,\alpha,\beta), B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha},\beta\right)$, $B(\alpha+i\beta,0,\lambda)$ и $B_D(\alpha,\beta,\sigma)$. Описаны интегральные операторы, сохраняющие классы Базилевича и показано, как интегральные операторы $L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}, L^{(-1)}_{\alpha+i\beta}$ и другие операторы, сохраняют не только класс Базилевича, но и любой его подкласс, выделяемый достаточно общими ограничениями на подынтегральную функцию.

Ключевые слова: Оператор дифференцирования и интегрирования, интегральное представление, функции Базилевича типа и порядка.

Summary

Found criteria of membership of holomorphic functions to classes Bazilevich: $B_D(\lambda,\alpha,\beta), B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha},\beta\right)$, $B(\alpha+i\beta,0,\lambda)$ *and* $B_D(\alpha,\beta,\sigma)$. *Described by integral operators that preserve classes of Bazilevich and shown as integral operators* $L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}, L^{(-1)}_{\alpha+i\beta}$ *and other operators maintain not only the class of Bazilevich, but any subclass of allocated fairly General restrictions on the integrand.*

Keywords: The operator of differentiation and integration, integral representation, functions Bazilevich type and order.

Введение. В 1955 г. И. Е. Базилевич [1], интегрируя уравнение Левнера - Куфарева со специальной правой частью, доказал, что функция вида

$$f(z)=\left[(\alpha+i\beta)\int_0^z g^{\alpha}(\zeta)h(\zeta)\zeta^{i\beta-1}d\zeta\right]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \qquad (1)$$

где $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$, $\alpha>0$, g — звездная функция, h — функция с неотрицательной вещественной частью, принадлежит классу $\boldsymbol{S}$ однолистных нормированных $f(0)=f'(0)-1=0$ конформных отображений единичного круга $\boldsymbol{U}=\{z|,|z|<1\}$. До сих пор класс $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\alpha,\beta}}$ функций Базилевича (1) является наиболее широким подмножеством $\boldsymbol{S}$, допускающим интегральное представление. Отметим, что среди функций Базилевича содержатся выпуклые ($\boldsymbol{S^0}$), почти-выпуклые *($\boldsymbol{K}$)* функции и другие.

Многочисленные исследования последних лет посвящены изучению аналитических и геометрических свойств класса $\boldsymbol{\mathcal{B}_{\alpha,\beta}}$. Были найдены критерии принадлежности функций классу Базилевича [2], [3], приведены геометрические характеристики образов $\boldsymbol{U}$ при отображениях функциями Базилевича в терминах достижимости извне спиральными кривыми [2], описаны интегральные операторы, сохраняющие класс Базилевича [4,5].

Большой интерес вызывают функции Базилевича нескольких комплексных переменных с разложением

$$f(z)=1+\sum_{|k|=1}^{\infty}a_k z^k \qquad (2)$$

в полных ограниченных кратнокруговых областях $D \subset C^n$ или в их подобластях $\overline{D}_r = r\overline{D}$, где $\overline{D}$ —замыкание области D и $r \in (0,1)$.

Целью настоящей статьи является показать, как интегральные операторы $L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}, L^{(-1)}_{\alpha+i\beta}$ и другие операторы, сохраняют не только класс Базилевича, но и любой его подкласс, выделяемый достаточно общими ограничениями на подынтегральную функцию.

Будем считать $f(z) \in H(D)$ функцией класса Базилевича $B_D(\lambda, \alpha, \beta)$, если

$$Re\left\{\left(e^{i\lambda} - \alpha\right)\frac{L_1 f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} + \alpha\frac{L_1^{(2)} f(z_1, z_2)}{L_1 f(z_1, z_2)}\right\} > \beta \cos\lambda\,,$$

где $0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\lambda| < \frac{\pi}{2}$.

Здесь $L_p[f(z)] = pf(z) + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$ [6]. $L_1^{(2)} f(z_1, z_2) = L_1 L_1 f(z_1, z_2)$.

Обратным к $L_p[f(z)]$ является оператор $L_p^{(-1)} f(z) = \int_0^1 \varepsilon^{p-1} f(\varepsilon z) d\varepsilon$.

Теорема 1. Если $f(z) \in B_D(\lambda, \alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$, то $B_D(\lambda, \alpha, \beta) \subseteq B_D(\lambda, 0, \beta) \equiv BS_D(\lambda, \beta)$.

Теорема 2. Если $f(z) \in B_D(\lambda, \alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$, то при всех $0 < \alpha_1 < \alpha$, $B_D(\lambda, \alpha, \beta) \subset B_D(\lambda, \alpha_1, \beta)$.

Определение 1. Пусть функция $f(z) \in H(D)$ имеет разложение (2). $f(z) \in H(D)$ нескольких комплексных переменных мы будем называть функцией Базилевича типа $\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}$ и порядка β, если

$$f(z) = \left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}\int_0^1 [\sigma(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2)]^{\frac{\cos\lambda}{\alpha}} \varepsilon^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} - 1} d\varepsilon\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}} \tag{3}$$

где $\sigma(z) \in M_D(\beta)$ [7, с. 165]. Класс функций с условием (3), где степенную функцию понимают в смысле главного значения, обозначим $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right)$.

Теорема 3. $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right) \subset B_D(\lambda, \alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$.

Теорема 4. [8, с. 90] Необходимым и достаточным условием принадлежности голоморфной функции $f(z)$ классу $B_D(\lambda, \alpha, \beta)$ является ее интегральное представление

$$f(z_1, z_2) = \left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}} [F(z_1, z_2)]^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}} \tag{4}$$

где функции $F(z)$ принадлежат $B_D(\lambda, 0, \beta) \equiv BS_D(\lambda, \beta)$.

Обозначим через $B(\alpha + i\beta, 0, \lambda)$ функции Базилевича нескольких комплексных переменных с разложением (2), голоморфные в D и удовлетворяющие условию

$$Re\frac{e^{i\lambda} f(z)^{\alpha + i\beta - 1} L_1 f(z)}{g(z)^{\alpha + i\beta}} > 0, \tag{5}$$

$\alpha > 0, \beta \in (-\infty, \infty)$, где функция $g(z) \in S_D\left(1, argtg\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$.

Теорема 5. [9, с. 13] Функция $f(z) \in B(\alpha + i\beta, 0, \lambda)$ тогда и только тогда, когда она имеет представление в виде

$$f(z) = \left[\frac{(\alpha + i\beta)}{e^{i\lambda}} L^{(-1)}_{\alpha + i\beta} h(z) g(z)^{\alpha + i\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha + i\beta}}, \tag{6}$$

где $g(z) \in S_D\left(1, argtg\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$, $h(z) \in C_D$ [8, с. 7] .

Доказательство. Пусть $f(z) \in B(\alpha + i\beta, 0, \lambda)$, то есть удовлетворяет условию (5).Тогда

$$f(z)^{\alpha + i\beta - 1} \mathcal{R}_1 f(z) = e^{-i\lambda} h(z) g(z)^{\alpha + i\beta}, \text{где } h(z) \in C_D.$$

Замечая, что

$$(\alpha+i\beta)f(z)^{\alpha+i\beta-1}L_1f(z)=L_{\alpha+i\beta}f(z)^{\alpha+i\beta},$$

легко получить

$$L_{\alpha+i\beta}f(z)^{\alpha+i\beta}=(\alpha+i\beta)e^{-i\lambda}h(z)g(z)^{\alpha+i\beta}. \qquad (7)$$

Применяя теперь обратный оператор к обеим частям равенства (6),приходим к (5).

Достаточность легко показывается, если провести рассуждения в обратном порядке.

Определение 2. $[10, \text{с.} 16]$, Множество функций $f(z)\in H(D\subset C^n), n\geq 2$,удовлетворяющих условиям $f(0)=1, f(z)\cdot\mathcal{R}_1f(z)\neq 0$ и

$$Re\left\{(\alpha-1+i\beta)\frac{L_1f(z)}{f(z)}+\alpha\frac{L_1^{(2)}f(z)}{L_1f(z)}\right\}>\sigma, \qquad (3)$$

где $0\leq\sigma<1$, - $\infty<\beta<\infty$, назовем классом функций Базилевича $B_D(\alpha,\beta,\sigma)$.

Теорема 6.. Функция $f(z)$ принадлежит классу $B_D(\alpha,\beta,\sigma)$ при $0\leq\sigma<\alpha<\infty$, - $\infty<\beta<\infty$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $F(z)\in M_D[11, \text{с.} 12]$, что в $D\subset C^n, n\geq 2$

$$f(z)=\left\{(\alpha+i\beta)\int\limits_0^1[F(\varepsilon z]^{\alpha-\sigma}\varepsilon^{\alpha-1+i\beta}d\varepsilon\right\}^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \qquad (4)$$

где для степенной функции взято главное значение.

Доказательство. Пусть $f(z)\in B_D(\alpha,\beta,\sigma)$. Тогда функция

$$F(z)=exp\left\{\frac{1}{\alpha-\sigma}\int_0^1(\alpha-1+i\beta)\frac{L_1f(\varepsilon z)}{f(\varepsilon z)}+\frac{L_1^{(2)}f(\varepsilon z)}{L_1f(\varepsilon z)}-\alpha+i\beta\right\}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \qquad (5)$$

и для неё будем иметь

$$(\alpha-1+i\beta)\frac{L_1f(z)}{f(z)}+\frac{L_1^{(2)}f(z)}{L_1f(z)}-\sigma=(\alpha-\sigma)\frac{L_1F(z)}{F(z)}+i\beta, \qquad (6)$$

Для наглядности доказательство теоремы проведем для функции двух комплексных переменных.

Докажем сначала равенство (6), а затем (5).

После несложных преобразований имеем:

$$L_1f(z_1,z_2)=\{f(z_1,z_2)\}^{1-\alpha-i\beta}\{F(z_1,z_2)\}^{\alpha-\sigma}.$$

Введем обозначения

$$L_1f(z_1,z_2)=\Phi(z_1,z_2),\ \ L_1^{(2)}f(z_1,z_2)=L_1\Phi(z_1,z_2).$$

Имеем

$$(\alpha-1+i\beta)\frac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}+\frac{L_1^{(2)}f(z_1,z_2)}{L_1f(z_1,z_2)}-\sigma=(\alpha-\sigma)\frac{L_1F(z_1,z_2)}{F(z_1,z_2)}+i\beta.$$

Перепишем (5) в виде

$$L_0lnF(z_1,z_2)=\frac{1}{\alpha-\sigma}\left\{(\alpha-1+i\beta)\frac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}+\frac{L_1^{(2)}f(z_1,z_2)}{L_1f(z_1,z_2)}-\alpha-i\beta\right\}$$

отсюда

$$F(z_1,z_2)=$$

$$=exp\left\{\frac{1}{\alpha-\sigma}\int_0^1\left[(\alpha-1+i\beta)\frac{L_1f(\varepsilon z_1,z_2)}{f(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}+\frac{L_1^{(2)}f(\varepsilon z_1,z_2)}{L_1f(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}-\alpha-i\beta\right]\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}.$$

Из (3) и (5) следует неравенство

$$Re\frac{L_1F(z_1,z_2)}{F(z_1,z_2)}>0,$$

совпадающее с критерием принадлежности функции $F(z_1,z_2)$ классу звездных функций M_D [11,с.12]. Рассматривая (6) как уравнение для $f(z_1,z_2)$ нетрудно записать $f(z_1,z_2)$ в виде (4).

Итак, $f(z_1,z_2)$ представима в виде (4) с функцией $F(z_1,z_2) \in M_D$, определяемой формулой (5).

Обратно, пусть задана функция $F(z_1,z_2) \in M_D$. Тогда функция $f(z_1,z_2)$, определенная формулой (4), будет голоморфной в D, так как $f(z_1,z_2) \cdot \mathcal{R}_1 f(z_1,z_2) \neq 0$, а (4) можно записать в виде

$$f(z_1,z_2) = \left\{(\alpha + i\beta) \int_0^1 [g(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2]^\alpha \varepsilon^{i\beta} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}^{\frac{1}{\alpha+i\beta}},$$

где $g(z_1,z_2) = [F(z_1,z_2)]^{\frac{\alpha-\sigma}{\alpha}}$ функция класса M_D. Поэтому $f(z_1,z_2) \in H(D)$, так что $f(z_1,z_2) \cdot L_1 f(z_1,z_2) \neq 0$ и из (4) получается (6). Следовательно, $f(z_1,z_2)$ будет удовлетворять D равенству (4) и $f(z_1,z_2) \in B_D(\alpha,\beta,\sigma)$.

Лемма 1. Пусть $|\lambda| < \frac{\pi}{2}, \sigma \in [0,1]$. Обозначим через $P_D(\lambda,\sigma) \in H(D \subset C^n)$ класс голоморфных функций в D функций $p(z_1,z_2), p(0,0) = 1$,удовлетворяющих условию

$$Re\{e^{-i\lambda} p(z_1,z_2)\} > \sigma cos\lambda. \tag{7}$$

Тогда голоморфная в D функция $q(z_1,z_2), q(0,0) = 1$, которая определяется уравнением

$$c\frac{L_0 g(z_1,z_2)}{g(z_1,z_2)} + q(z_1,z_2) = p(z_1,z_2), \tag{8}$$

где $c = |c|e^{i\lambda}, p(z_1,z_2) \in P_D(\lambda,\sigma)$, тоже принадлежит классу $P_D(\lambda,\sigma)$.

Теорема 4. При $0 \leq \sigma \leq \alpha < \infty, \beta \in (-\infty,\infty)$ имеет место вложения $B_D(\alpha,\beta,\sigma) \subseteq S_D(1, arctg\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\sigma}{\alpha})$.

Следствие 1. Если $\alpha_1 + i\beta_1 = t(\alpha + i\beta), t \geq 1, \frac{\sigma}{\alpha} \geq \frac{\sigma_1}{\alpha_1}, \alpha \leq \alpha_1$, то

$$B_D(\alpha,\beta,\sigma) \subseteq B_D(\alpha_1,\beta_1,\sigma_1).$$

Литература

1. Базилевич И.Е. Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Лёвнера-Куфарева // Мат. сб.-1955.-Т.37.-№3.-С.471-476.
2. Прохоров Д. В. Об одном обобщении класса почти выпуклых функций // Мат. заметки.- 1972. - Т. 11.- № 5 . -С. 509-516.
3. Sheil - Smal1 T. On Bazilevič functions // Quart. J. Math. - 1972. - V.23.- № 90.pp. 135-142.
4. Singh R. On Bazilevič function // Proc. Amer. Math. Soc. - 1973. - V. 38. № 2. - P. 261—271.
5. Ruscheweyh St. Eine Invarianzeigenschaft der Bazilevič-Functionen // Math. Z.- 1973.-Bd. 134.-№ 3.- S. 215—219.
6. Баврин И.И. Операторы и интегральные представления.- М.-1974.-99 с.8.
7. Баврина К.П. Обобщение звездно однолистных функций порядка α на случай двух комплексных переменных //- МОПИ им. Н.К.Крупской -1972. - Вып 15.-№2.- С.165-176.
8. Султыгов М.Д. О функциях Базилевича и Мокану нескольких комплексных переменных // Успехи современной науки.- Белгород.-№ 9.-Т.5. -2016- С.90-92.
9. Султыгов М.Д. О функции Базилевича нескольких комплексных переменных // Вестник науки и образования. - М.-№7(19).-С.11-14.
10. Султыгов М.Д. О функциях Базилевича многих комплексных переменных XIV Международная научно практическая конференция «Современные научные исследования: актуальные теории и концепции»// - С.15-19
11. Баврин И.И. Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы.- М.-1976.-99 с.