ЛОКАЛИЗАЦИЯ И КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПОРЯДКОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Калашников А.Л.©
Кандидат физико-математических наук, доцент,
Институт информационных технологий математики и механики
Нижегородского государственного университета им.Н.И.Лобачевского

Аннотация

Рассматривается задача оптимизации в КВ-линеале управлений. Для этой задачи имеется последовательность конечномерных k-задач. Приведены условия порядковой ограниченности оптимальных множеств управлений исходной задачи и k-задач и порядковой сходимости оптимальных управлений k-задач к оптимальному множеству исходной задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, порядок, КВ-линеал, *k*-задачи, сходимость.
Keywords: optimal control, ordinal, KV-lineal, *k*-problems, convergence.

В статье рассматривается 0-задача минимизации функционала $g_0(x,u)$ при операторном $F(x,u)=0$ и функциональных ограничениях $g_j(x,u)\le 0$ на состояние x и управление u. Пространство управлений U здесь КВ-линеал с единицей e определенного в [1, 84]. Например, это имеет место для задачи оптимального управления с интегральными ограничениями и интегральным целевым функционалом в КВ-линеале $U=L_p^m[a;b]$. К исходной 0-задаче имеются *k*-задачи минимизации в конечномерных подпространствах $U_k\subset U$. Приведены условия, когда аргументы минимума u_0 в 0-задаче и u_k^0 в *k*-задаче *e*-ограничены по порядку. Доказана также компактность минимизирующей $\{u_k^0\}$ и порядковая сходимость в U_e к $U^0=\{u_0\}$ – оптимальному множеству, то есть в более сильной метрике, чем в U. Здесь U_e есть КВ-линеал *e*-ограниченных элементов, определённый в [1,198]. Отметим, что эту сходимость по терминологии [2,178] можно назвать *e*-регулярностью, полученной здесь без стабилизатора, определённого в [2,165].

1. Рассматривается 0-задача: $g_0(x,u)\to\inf$

$$F(x,u)=0,\ g_j(x,u)\le 0,\ x\in X,\ u\in U,\ j=\overline{1,n}.$$

Здесь операция $F: X\times U\to Z$, где *X*, *Z* – банаховы пространства, а пространство U есть КВ-линеал с единицей e. Функционалы g_0, g_j и операция *F* класса C^1 на $X\times U$. Пусть для всех $u\in U$ уравнение $F(x,u)=0$ имеет единственное решение $x=x(u)$ класса C^1. Например, такое имеет место на основе теоремы о неявной функции [3,40]. Тогда все $g_j(x(u),u)$ класса C^1 и 0-задача представляется в виде: $g_0(x(u),u)\to\inf$

$$g_j(x(u),u)\le 0,\ u\in U,\ j=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Пусть в 0-задаче (1) допустимое множество $D_0\ne\varnothing$ и $U^0=\{u_0\}\ne\varnothing$, а также $D_0\subset S\subset U$, где S – некоторое множество и u_0 – аргумент минимума в (1). Условия $U^0\ne\varnothing$ имеются, например, в [2,46]. Введем функцию Лагранжа $L(x(u),u,\overline{\lambda})=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j g_j(x(u),u)$ с $\overline{\lambda}=(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n)^T$. По [4,209] имеем $L_u'(x(u_0),u_0,\overline{\lambda}^0)=0$ для некоторых чисел $\lambda_j^0\ge 0$ при

$\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0=1$. Предположим, что сопряженное U^* – КВ-линеал с единицей a и U_a^* – КВ-линеал a-ограниченных элементов в U^*. Далее $\|\cdot\|_e$ – норма в U_e и $\|\cdot\|_a$ – норма в U_a^*, а $|u|$ – модуль для $u\in U$ и $U_e^0=U_e\cap U^0$. Пусть для $j=\overline{0,n}$ $g_j(x,u)=a_j(u)+b_j(x,u)$, где $a_j(u)$, $b_j(x,u)$ – функционалы класса C^1 на $X\times U$, а $q(u,\overline{\lambda})=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j a_j(u)$. Далее, $\rho_e(u,Q)=\inf_{v\in Q}\|u-v\|_e$ с $u\in U_e$, $Q\subset U_e$.

Лемма. Пусть последовательность $\{s_k\}\subset U_e$ и компактна в U_e, а любой её частичный предел $v\in Q\subset U_e$. Тогда $\lim_{k\to\infty}\rho_e(s_k,Q)=0$.

Доказательство здесь аналогично основной лемме 1 о регуляризации [2,178] с учётом компактности $\{s_k\}\subset U_e$ и $v\in Q\subset U_e$.

Теорема 1. Пусть существуют числа $\alpha,\mu,\beta>0$ и 1) для всех $u\in S$ $|b'_{j,u}(x(u),u)|\le\mu a$ и $|a'_{j,u}(0)|\le\alpha a$ при $j=\overline{0,n}$; 2) существует оператор $B>0$: $U^*\to U$ с $0<Ba\le\beta e$ и такой, что при всех $\lambda_j\ge 0$ с $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j=1$ и $u,v\in S$ модуль $|u-v|\le B|q'_u(u,\overline{\lambda})-q'_u(v,\overline{\lambda})|$. Тогда $|u_0|\le(\mu+\alpha)\beta e$, а $u_0\in U_e^0\ne\varnothing$.

Доказательство. Так как $L'_u(x(u_0),u_0,\overline{\lambda_0})=0$ с $\lambda_j^0\ge 0$ и $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0=1$, то по виду $g_j(x,u)$, $q(u,\overline{\lambda})$ имеем $q'_u(u_0,\overline{\lambda}^0)=-\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0 b'_{j,u}(x(u_0),u_0)$. Пусть $u=u_0$, $v=0$ в $|u-v|\le B|q'_u(u,\overline{\lambda})-q'_u(v,\overline{\lambda})|$. Тогда $|u_0|\le B|q'_u(u_0,\overline{\lambda^0})-q'_u(0,\overline{\lambda^0})|$.
Поскольку $u_0\in U^0\subset D_0\subset S$, то по условию 1) $|b'_{j,u}(x(u_0),u_0)|\le\mu a$. Из равенства $q'_u(u_0,\overline{\lambda}^0)=-\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0 b'_{j,u}(x(u_0),u_0)$ с оценкой по модулю получаем $|q'_u(u_0,\overline{\lambda}^0)|\le\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0|b'_{j,u}(x(u_0),u_0)|\le\mu a$. Так как $|a'_{j,u}(0)|\le\alpha a$, то из определения функционала $q(u,\overline{\lambda})$ получаем $|q'_u(0,\overline{\lambda^0})|\le\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0|a'_{j,u}(0)|\le\alpha a$. Поскольку $0<Ba\le\beta e$, то по $|u_0|\le B|q'_u(u_0,\overline{\lambda^0})-q'_u(0,\overline{\lambda^0})|$ имеем оценку:

$$|u_0|\le B(|q'_u(u_0,\overline{\lambda^0})|+|q'_u(0,\overline{\lambda^0})|)\le(\mu+\alpha)Ba\le(\mu+\alpha)\beta e.$$

Отсюда $|u_0|\le(\mu+\alpha)\beta e$ и $u_0\in U_e^0=U_e\cap U^0\ne\varnothing$. Теорема доказана.

2. Пусть имеются конечномерные подпространства $U_k\subset U$ при $k=1,2,\ldots$ с такой же нормировкой как в U и k-задачи: $g_0(x(u),u)\to\inf$

$$g_j(x(u),u)\le 0,\ u\in U_k,\ j=\overline{1,n},$$

с допустимым множеством $D_k=D_0\cap U_k\ne\varnothing$. Так как $D_k=D_0\cap U_k\subset D_0$, а по непрерывности $g_j(x(u),u)$ множество D_0 замкнуто в U, то с ним и все D_k или замыкание $\overline{D_0}=D_0$ и $\overline{D_k}=D_k$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и существует u_k^0 — аргумент минимума в k-задаче. Тогда A) $L'_u(x(u_k^0),u_k^0,\overline{\lambda_k^0})=0$ для некоторых чисел $\lambda_{j,k}^0\ge 0$ с $\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0=1$ и $\overline{\lambda_k^0}=(\lambda_{0,k}^0,\lambda_{1,k}^0,...,\lambda_{n,k}^0)^T$; B) для всех $k\ge 1$ модуль $|u_k^0|\le(\mu+\alpha)\beta e$ и $u_k^0\in U_e$.

Доказательство. Очевидно, $u_k^0\in D_k\subset D_0\subset S$. По [4,209] существуют $\lambda_{j,k}^0\ge 0$ с $\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0=1$ и $L'_u(x(u_k^0),u_k^0,\overline{\lambda_k^0})=0$. Тогда верно A). Доказательство же B) аналогично как в теореме 1 с учетом $u_k^0\in S$. Теорема доказана.

Назовём k-задачи минимизирующими 0-задачу по функционалу, если существует $\lim\limits_{k\to\infty}d_k=d_0$ при $d_k=\inf$ в k-задаче. Если же $d_k=g_k(x(u_k^0),u_k^0)$ и u_k^0 — аргумент минимума, то $\{u_k^0\}$ будет минимизирующей.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 и C) для $j=\overline{0,n}$ и любой $\{v_k\}\subset S$ $\{b'_{j,u}(x(v_k),v_k)\}$ компактна в U_a^*; D) $\lim\limits_{k\to\infty}d_k=d_0$. Тогда последовательность $\{u_k^0\}\subset U_e$, будет минимизирующей и компактной в U_e, а её частичные пределы $v_0\in U_e^0$ со значением $g_0(x(v_0),v_0)=d_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}(\rho_e(u_k^0,U_e^0)=0$.

Доказательство. Из $L'_u(x(u_k^0),u_k^0,\overline{\lambda_k^0})=0$ и определения $g_j(x,u)$, $q(u,\overline{\lambda})$ имеем $q'_u(u_k^0,\overline{\lambda_k^0})=-\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0 b'_{j,u}(x(u_k^0),u_k^0)$, где $\lambda_{j,k}^0\ge 0$ и $\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0=1$. Поскольку $u_k^0\in S$, то на основе условия C) теоремы 3 $\{b'_{j,u}(x(u_k^0),u_k^0))$ компактна в U_a^* при $j=\overline{0,n}$. Но $\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0=1$ и $\lambda_{j,k}^0\ge 0$. Тогда $0\le\lambda_{j,k}^0\le 1$ и $\{\lambda_{j,k}^0\}$ как ограниченная для $j=\overline{0,n}$ компактна в R^1. Поэтому имеем компактность $\{\lambda_{j,k}^0 b'_{j,u}(x(u_k^0),u_k^0)\}$ и $\{-\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0 b'_{j,u}(x(u_k^0),u_k^0)\}$ в U_a^*. На основе равенства $q'_u(u_k^0,\overline{\lambda_k^0})=-\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0 b'_{j,u}(x(u_k^0),u_k^0)$ получаем компактность $\{q'_u(u_k^0,\overline{\lambda_k^0})\}$ в U_a^*. По теореме 2 $u_k^0\in U_e$. Используя $|u-v|\le B|q'_u(u,\overline{\lambda})-q'_u(v,\overline{\lambda})|$ условия 2) теоремы 1, нетрудно установить, переходя к сходящимся в U_a^* подпоследовательностям $\{q'_u(u_{km}^0,\overline{\lambda_{km}^0})\}$, компактность $\{u_k^0\}$ в U_e. Пусть v_0 – частичный предел для $\{u_k^0\}$. Тогда существует $\{u_{kn}^0\}$ с $\lim\limits_{kn\to\infty}u_{kn}^0=v_0$ в U_e и $v_0\in U_e$. Так как из сходимости в U_e следует сходимость и в U [2,199], то в U предел $\lim\limits_{kn\to\infty}u_{kn}^0=v_0$. По непрерывности операции $x(u)$ и $g_j(x(u),u)$ в U получаем $\lim\limits_{kn\to\infty}x(u_{kn}^0)=x(v_0)$ в X, а из $g_j(x(u_{kn}^0),u_{kn}^0)\le 0$ в пределе $g_j(x(v_0),v_0)\le 0$. Следовательно, $v_0\in D_0$. Из условия D) $\lim\limits_{k}d_k=d_0$. Но $d_k=g_k(x(u_k^0),u_k^0)$. Поэтому $\{u_k^0\}$ будет минимизирующей. Очевидно, имеем $\lim\limits_{kn\to\infty}d_{kn}=d_0$ при $d_{kn}=g_0(x(u_{kn}^0),u_{kn}^0)$. По непрерывности $g_0(x(u),u)$ в пространстве U существует $\lim\limits_{kn\to\infty}g_0(x(u_{kn}^0),u_{kn}^0)=g_0(x(v_0),v_0)=d_0$. Отсюда $v_0\in U^0$, а так как $v_0\in U_e$, то, следовательно, $v_0\in U_e^0=U_e\cap U^0$.

По доказанному выше $\{u_k^0\}$ компактна в U_e, а любой её частичный предел $v_0 \in U_e^0$. Тогда, применяя лемму для множества $Q = U_e^0$, получаем $\lim\limits_{k\to\infty}(\rho_e(u_k^0, U_e^0) = 0$ в пространстве U_e. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, а для $k \geq 1$ существует аппроксимация $v_k \in U_k$ при $v_k - u_k^0 \in U_e$ и $\| u_k^0 - v_k \|_e \leq \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k \to 0$. Тогда $\{v_k\} \subset U_e$ и компактна в U_e, а её частичные пределы $v \in U_e^0$ и существует $\lim\limits_{k\to\infty} g_0(x(v_k), v_k) = d_0$. Кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_e(v_k, U_e^0) = 0$.

Доказательство. По теореме 3 $\{u_k^0\}$ компактна в U_e с частичными пределами $v \in U_e^0$. Из $\| u_k^0 - v_k \|_e \leq \varepsilon_k$ при $\varepsilon_k \to 0$ имеем компактность $\{v_k\}$ в U_e и такие же с $\{u_k^0\}$ частичные пределы $v \in U_e^0$. Тогда $g_0(x(v), v) = d_0$. Поскольку сходимость в U_e влечет [1,199] также сходимость в U, то $\{v_k\}$ компактна и в U. По непрерывности $g_0(x(u), u)$ в U, компактности $\{v_k\}$ в U и равенстве $g_0(x(v), v) = d_0$ для всех v получаем $\lim\limits_{k\to\infty} g_0(x(v_k), v_k) = d_0$. Применяя лемму для $Q = U_e^0$, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_e(v_k, U_e^0) = 0$. Теорема доказана.

3. Приведём пример конечномерных подпространств U_k, при которых выполнены условия и заключения вышеизложенных теорем. Пусть существует линейно-независимая система $[q_m]_{m=1}^{\infty} \subset U$ такая, что $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k} = U$, где U_k – линейная оболочка для $[q_m]_{m=1}^{k}$. Введём в U_k норму пространства U. Тогда на основе [5,144] U_k – конечномерное банахово подпространство в U. Предположим, что $S = \{u \in U : \| u \| \leq C\}$. Такое, в частности, будет, если в ограничениях некоторый $g_j(x(u), u) = \| u \| - C \leq 0$, где C – постоянная.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1, условие C) теоремы 3 и $D_0 \cap U_1 \neq \varnothing$. Тогда I) существует u_k^0 – аргумент минимума в k-задаче и $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = d_0$, а модуль $| u_k^0 | \leq (\mu + \alpha)\beta e$ и $u_k^0 \in U_e$; II) $\{u_k^0\}$ минимизирующая в 0-задаче, компактная в U_e и $\lim\limits_{k\to\infty}(\rho_e(u_k^0, U_e^0) = 0$.

Доказательство. Очевидно, $U_k \subset U_{k+1}$ для всех $k \geq 1$. Отсюда имеем $D_k = D_0 \bigcap U_k \subset D_0 \bigcap U_{k+1} = D_{k+1}$. Так как $D_1 = D_0 \cap U_1 \neq \varnothing$, то все $D_k \neq \varnothing$. Поскольку $D_k \subset D_0 \subset S$, а по предположению S ограничено по норме. то все D_k ограничены по норме той же *const*. На основе [5,142] сходимости в U и в U_k равносильны. Тогда по [5,142] D_k будет компактно и замкнуто в U и U_k. Так как $g_0(x(u), u)$ непрерывен, то по теореме Вейерштрасса [2,46] существует u_k^0 – аргумент минимума в k-задаче и по ней же для $u \in U$ существует $w_k = \operatorname{argmin}\limits_{v \in D_k} \| u - v \|_U$. Очевидно, $w_k \in D_k$. Определим для $k \geq 1$ и $u \in U$ отображение $Q_k(u) = w_k$. Введём $P = D_0 \bigcap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k \right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$. Тогда $P \subset D_0$ и $\overline{P} = \overline{D_0} \bigcap \left(\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k} \right)$. Но $\overline{D_0} = D_0$ и $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k} = U$. Отсюда $\overline{P} = D_0$. Пусть $w \in P$. Тогда существует $k = k_0$, для которого $w \in D_{k_0}$. Поскольку $D_k \subset D_{k+1}$, то $w \in D_k$ при $k \geq k_0$. Но $Q_k(u) = u$, если $u \in D_k$. Поэтому

$Q_k(w)=w$ для $k \geq k_0$ и в U существует $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k(w)=w$. Так как $g_0(x(u),u)$ непрерывен в U, то $\lim\limits_{k\to\infty} g_0(x(Q_k(w)),Q_k(w))=g_0(x(w),w)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{k\to\infty}}(g_0(x(Q_k(w)),Q_k(w))-g_0(x(w)),w))=\\&=\lim_{k\to\infty}(g_0(x(Q_k(w)),Q_k(w))-g_0(x(w),w))=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $Q_k(w)\in D_k$ при $w\in P$, то $d_k \leq (g_0(x(Q_k(w)),Q_k(w)))$ и

$$\begin{aligned}&d_k-d_0 \leq (g_0(x(Q_k(w)),Q_k(w)))-d_0=\\&=(g_0(x(Q_k(w)),Q_k(w)))-g_0(x(w),w)+g_0(x(w),w)-d_0.\end{aligned}$$

При переходе к верхнему пределу получаем неравенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(d_k-d_0)\leq \overline{\lim_{k\to\infty}}(g_0(x(Q_k(w)),Q_k(w))-g_0(x(w),w))+(g_0(x(w),w)-d_0).$$

Отсюда, применяя равенство (2), имеем для всех $w\in P$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(d_k-d_0)\leq g_0(x(w),w)-d_0. \tag{3}$$

Поскольку $P\subset D_0$ и $\overline{P}=D_0$, то для всех $s\in D_0$ существует $\{s_m\}\subset P$ с $\lim\limits_{m\to\infty} s_m=s$ в U. Тогда предел $\lim\limits_{m\to\infty} g_0(x(s_m),s_m)=g_0(x(s),s)$ по непрерывности $g_0(x(u),u)$ в U. Полагая в (3) $w=s_m\in P$ и фиксируя m, получаем $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d_k-d_0)\leq g_0(x(s_m),s_m)-d_0$. Отсюда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d_k-d_0)\leq g_0(x(s),s)-d_0$ при переходе к пределу, когда $m\to\infty$. Нетрудно установить неравенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(d_k-d_0)\leq \inf_{s\in D_0} g_0(x(s),s)-d_0=d_0-d_0=0. \tag{4}$$

Поскольку $D_k\subset D_0$, то для всех $u\in D_k$ будет $d_0\leq g_0(x(u),u)$ и при $k\geq 1$ получаем $d_0\leq \inf\limits_{u\in D_k} g_0(x(u),u)=d_k$. Отсюда $d_k-d_0\geq 0$. С учётом (4) имеем $0\leq \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d_k-d_0)\leq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d_k-d_0)\leq 0$. Тогда $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d_k-d_0)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d_k-d_0)=0$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}(d_k-d_0)=0$ или $\lim\limits_{k\to\infty} d_k=d_0$ и, тем самым, выполнено условие D) теоремы 3. По доказанному выше существует u_k^0 — аргумент минимума в k-задаче, а по предположению выполнены условия теоремы 1. Тогда, применяя теорему 2, получаем $|u_k^0|\leq(\mu+\alpha)\beta e$ и $u_k^0\in U_e$ и утверждение I) доказано. По предположению выполнено условие C) теоремы 3 и доказано выполнение условия D). Применяя теорему 3 с учетом $d_k=g_k(x(u_k^0),u_k^0)$, получаем, что $\{u_k^0\}$ минимизирующая в 0-задаче и компактная в U_e, а также $\lim\limits_{k\to\infty}(\rho_e(u_k^0,U_e^0)=0$. Утверждение II) установлено. Теорема доказана.

Замечание. Условие $D_1=D_0\cap U_1\neq\varnothing$, например, выполняется, если $0\in \operatorname{int} D_0$ или $g_j(x(0),0)<0$ при $j=\overline{1,n}$. По теореме 5 k-задача есть минимизация на конечномерном компакте и корректна [2,163] и к ней применимы различные методы минимизации для конечномерных пространств.

Рассмотрим 0-задачу оптимального управления в интегральной форме:

$$g_0(x,u)=\int_{t_0}^{t_1}\big(a_0(u,t)+b_0(x,t)\big)dt\to\inf$$

$$F(x,u)=x-x_0-\int_{t_0}^{t}(A(x,s)+B(s)u(s))ds=0,\ t\in[t_0,t_1], \tag{5}$$

$$g_j(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} \left(a_j(u,t) + b_j(x,t)\right) dt \le 0\,, \quad j = \overline{1,n}\,,$$

где $x \in X = C([t_0,t_1], R^m)$, $u \in U = L_2^s[t_0,t_1]$, где $A(x,t)$ — вектор-функция, а $B(t)$ —матрица размера $m \times s$. Пусть $A(x,t)$, $a_j(u,t)$, $b_j(x,t)$, $B(t)$ класса C^1 при всех $x \in R^m$, $u \in R^s$, $t \in [t_0,t_1]$. Тогда для системы $[q_m]_{m=1}^{\infty}$, где q_m — вектор-функция многочлен, а $e = e(t) = (1,1,,...,1)^T$ при выполнении условий вышеизложенных теорем на основе [6], получаем сходимость оптимальных управлений $u_k^0(t)$ в $U_e = L_\infty^m[t_0,t_1]$ или почти всюду равномерно.

Литература

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
5. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.
6. А.Л. Калашников – Аппроксимация и ограниченность оптимального множества управлений для динамической системы // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского, серия Математическое моделирование и оптимальное управление. Н.Новгород, Изд-во ННГУ. – 2003. – Выпуск №1. – С. 138–141.