КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИВЕДЕННЫХ ФОРМ КУБИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПО ВЕЛИЧИНЕ СТЕПЕНИ КРИТЕРИЯ СИММЕТРИИ КОРНЕЙ

Стаценко И.В. ©
Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики,
Московский энергетический институт

Аннотация

В статье представлен метод анализа приведенных форм кубических многочленов одной переменной на основе критерия симметрии корней многочлена относительно одного центрального корня

Ключевые слова: кубические многочлены, кубические уравнения, тригонометрические формулы Виета.

Keywords: cubic polynomials, cubic equations, trigonometric formulas of vieta.

Рациональные алгоритмы поиска и формы представления решений кубического уравнения и в настоящее время являются актуальным предметом исследований, о чем говорят, в частности, некоторые публикации и защищенные авторские свидетельства [1]. Как правило, данные исследования направлены на поиск рациональных по некоторым критериям приведенных форм кубического многочлена (уравнения). Цель представленной работы – обоснование возможного критерия классификации приведенных форм кубического уравнения.

Рассмотрим кубический многочлен вида:

$$F(x) \equiv x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3, \tag{1}$$

где $c_1, c_2, c_3 - const$ - действительные числа.

Соответствующее кубическое уравнение имеет вид:

$$F(x) = 0. \tag{2}$$

Пусть

$$x_1 = x_2 - \Delta, \quad x_3 = x_2 + \theta, \tag{3}$$

где x_1, x_2, x_3 - корни многочлена (1), являющиеся в общем случае комплексными числами; Δ, θ - расстояния между корнями – комплексные числа.

Если $\Delta = \theta \in R$ полагаем, что корни действительные - x_1, x_3 расположены симметрично относительно действительного корня x_2 вдоль действительной оси. Если $\mathrm{Re}(x_1) = x_2 = \mathrm{Re}(x_3)$ полагаем, что комплексные корни x_1, x_3 расположены симметрично относительно действительного корня x_2 в направлении мнимой оси.

Пусть $z = (\Delta - \theta)$. Используя соотношения Виета для коэффициентов кубического уравнения можно получить приведенную форму вида:

$$z^3 - 3Dz = \Omega, \tag{4}$$

где

$$D = c_1^2 - 3c_2 = (\Delta - \theta)^2 + 3\Delta\theta, \tag{5}$$

$$\Omega = -2c_1^3 + 9c_1c_2 - 27c_3. \tag{6}$$

Величина Ω может рассматриваться в качестве критерия симметрии корней многочлена относительно одного центрального действительного корня, так как в случае $z = (\Delta - \theta) = 0$ имеем, что $\Omega = 0$.

Приведенная форма кубического уравнения в виде (4) может использоваться в качестве базовой для получения других приведенных форм уравнения (2), при этом в качестве классификатора форм можно использовать величину степени критерия Ω. Возведение левой и правой части уравнения (4) в квадрат и замена переменной $z_1 = -z^2 + 2D$ позволяют получить приведенную форму второго порядка в виде:

$$z_1^3 - 3D^2 z_1 = 2D^3 - \Omega^2 . \qquad (7)$$

Далее возведение левой и правой части уравнения (7) в квадрат и замена переменной $z_2 = z_1^2 - 2D^2$ позволяют получить приведенную форму четвертого порядка в виде:

$$z_2^3 - 3D^4 z_2 = \Omega^4 - 4D^3\Omega^2 + 2D^6 . \qquad (8)$$

Очевидно, что указанный процесс получения приведенных форм не имеет ограничений сверху по показателю k степени величины Ω^k при условии, что $k = 2^n$, $n \in N$.

Покажем возможности использования приведенных форм первого и второго порядка в практических целях. Учитывая, что $z_1 = -z^2 + 2D = D + 3\Delta\theta$, в уравнении (7) проведем замену переменной вида $z_1 = D + 3t$. В результате имеем следующую приведенную форму второго порядка:

$$t^3 + Dt^2 = \frac{4D^3 - \Omega^2}{27}, \qquad t = \Delta\theta . \qquad (9)$$

В правой части данного уравнения величина $W = 4D^3 - \Omega^2$ выступает в качестве критерия кратности корней кубического уравнения. В случае $W = 0$ и $D \neq 0$, $\Omega \neq 0$ кубическое уравнение имеет один действительный корень кратности 2 и один действительный корень кратности 1. В случае $W = 0$ и $D = 0$, $\Omega = 0$ кубическое уравнение имеет один кубический корень кратности 3.

Далее, извлекая квадратный корень в левой и правой части уравнения (9), и, проведя замену переменной $u = \sqrt{-t - D}$, получим следующую приведенную форму первого порядка:

$$u^3 + Du = \frac{\sqrt{\Omega^2 - 4D^3}}{3\sqrt{3}} . \qquad (10)$$

Сложение приведенных форм (4) с (10) позволяет выделить полный куб в левой части кубического уравнения (2) в виде:

$$\left(\sqrt{3}u + z\right)^3 = 4\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 4D^3}\right). \qquad (11)$$

Учитывая, что $u = \sqrt{-t - D} = \sqrt{\dfrac{z^2 - 4D}{3}}$ см. (5), приведенную форму (11) можно представить следующим образом:

$$\left(z + \sqrt{z^2 - 4D}\right)^3 = 4\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 4D^3}\right). \qquad (12)$$

Величина $y = z + \sqrt{z^2 - 4D}$ является корнем квадратного уравнения

$$y^2 - zy + D = 0 . \qquad (13)$$

Откуда имеем $z = y + \dfrac{D}{y}$. Таким образом, решение кубического уравнения в форме (4) приобретает вид:

$$z = \sqrt[3]{0{,}5\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 4D^3}\right)} + \frac{D}{\sqrt[3]{0{,}5\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 4D^3}\right)}} . \qquad (14)$$

Форма (14) удобна для поиска комплексных корней кубического уравнения. В случае, когда $\Omega^2 - 4D^3 < 0$ на базе (14) с помощью замены переменной $a = \frac{z}{2\sqrt{D}}$ можно получить следующую приведенную форму первого порядка (приведенная форма Виета):

$$4a^3 - 3a = \frac{\Omega}{2D\sqrt{D}}, \qquad D \neq 0. \tag{15}$$

Геометрический смысл величины $2\sqrt{D}$ - расстояние между двумя экстремумами многочлена $F(x)$. Если $D = 0$ имеется один действительный корень кратности 3.

Далее, полагая $a = \cos(\varphi)$, и учитывая, что $4a^3 - 3a = \cos(3\varphi)$, получим

$$z = 2 \cdot \sqrt{D} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(\frac{\Omega}{2D \cdot \sqrt{D}}\right)\right), \qquad D \neq 0 \tag{16}$$

Приоритетность применения формул (14,16) и последовательность вычисления корней кубического уравнения (2) представлена в таблице 1.

Таким образом, в статье проведена классификация приведенных форм кубического многочлена (уравнения) по величине степени критерия симметрии корней многочлена. Данная классификация позволяет формализовать возможные случаи вычисления конкретных корней (действительных и комплексных) по геометрическому смыслу переменных в левой части и констант в правой части приведенной формы кубического уравнения.

Таблица 1

<table>
<tr><td>Приведенная форма
$z^3 - 3D \cdot z = \Omega$,
$\Omega = -2c_1^3 + 9c_1c_2 - 27c_3$,
$D = c_1^2 - 3 \cdot c_2$.</td><td>Приведенная форма
$4 \cdot a^3 - 3 \cdot a = \Phi$,
$\Phi = \frac{\Omega}{2D \cdot \sqrt{D}}$.</td></tr>
<tr><td>Ситуация 1
$\Omega^2 - 4D^3 \geq 0$
$w = 0{,}5 \cdot \left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 4D^3}\right)$.
$z = \sqrt[3]{w} + \frac{D}{\sqrt[3]{w}}$.
$\theta = 0{,}5 \cdot \left(-z + \sqrt{\left(\frac{4D - z^2}{3}\right)}\right)$.
$\Delta = \theta + z$.
$x_2 = (-c_1 + z)/3$.
$x_1 = x_2 - \Delta$.
$x_3 = x_2 + \theta$.</td><td>Ситуация 2
$\Omega^2 - 4D^3 < 0$
$\varphi = \arccos(\Phi)$
$z = 2 \cdot \sqrt{D} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \varphi\right)$.
$\theta = 0{,}5 \cdot \left(-z + \sqrt{\left(\frac{4D - z^2}{3}\right)}\right)$.
$\Delta = \theta + z$.
$x_2 = (-c_1 + z)/3$.
$x_1 = x_2 - \Delta$.
$x_3 = x_2 + \theta$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Частные случаи
Случай 1. $(D = 0)$. $x = \frac{-c_1}{3}$ - корень кратности 3.
Случай 2. $(\Omega = 0)$. $x_2 = \frac{-c_1}{3}$, $x_3 = x_2 + \sqrt{D/3}$, $x_1 = x_2 - \sqrt{D/3}$.</td></tr>
</table>

Литература

1. Веткос И.Г., Прозоровский А.А. Новый метод решения кубических уравнений с рациональными корнями.- //Молодежный научно-технический вестник ФС77-51037, ISSN 1307-0609//.- МГТУ им. Н.Э. Баумана 2016.