Шутенко А.В.[1], Астахов М.С.[2], Широков И.В.[3] ©

[1,2]Аспирант кафедры «Комплексная защита информации»; [3]профессор, доктор физико-математических наук,

Омский государственный технический университет

ПРОБЛЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ГРАФЕ

Аннотация

В статье предложен подход к решению проблемы вычисления количества простых циклов в произвольном графе, позволяющий снизить временные затраты на получение результата.

Ключевые слова: простой цикл, гамильтонов цикл, количество циклов, произвольный граф.
Keywords: simple cycle, Hamiltonian cycle, quantity of cycles, arbitrary graph.

Введение

Существует старейшая классическая задача определения является ли граф гамильтоновым или нет [1, 42]. Гамильтонов граф - это граф содержащий путь (цепь), в который входит каждая вершина графа ровно один раз. Однако на сегодняшний день не существует эффективного способа решения данной задачи. Так же не существует эффективного метода поиска всех простых циклов в графе. Цикл называется простым, если каждая вершина входит в него только один раз. Для решения задачи определения (поиска) гамильтонова цикла (а так же простых циклов) существуют такие методы как "поиск в ширину", "поиск в глубину", "колорирование" и др.

Поиск в глубину - это один из методов обхода графа [2, 211]. Алгоритм поиска описывается следующим образом: для каждой не пройденной вершины необходимо найти все не пройденные смежные вершины и повторить поиск для них.

Поиск в ширину - это так же метод обхода графа, заключающийся в перемещении от исходной вершины ко всем смежным с ней (в ширь) [2, 211]. Сам алгоритм можно понимать как процесс "поджигания" графа: на нулевом шаге поджигаем только исходную вершину. На каждом следующем шаге огонь с каждой уже горящей вершины перекидывается на всех её соседей; т.е. за одну итерацию алгоритма происходит расширение "кольца огня" в ширину на единицу (отсюда и название алгоритма).

Колорирование - данный метод заключается в условном окрашивании посещенный вершин в определенный цвет (присвоение метки), что позволяет в любой момент определить является ли данная вершина посещенной или нет [3, 2]. На данном методе базируются другие методы обхода графа.

Выше представленные методы способствуют решению задачи поиска гамильтонова цикла, а так же простых циклов. Следует заметить, что данная задача является NP-полной задачей и её решение данными методами малоэффективно и требует невозможно большого времени для графов с большим количеством вершин (ребер) [4, 202-203]. Далее будет представлен способ позволяющий снизить временные затраты на решение данной проблемы.

Вывод аналитической формулы

Рассмотрим следующее выражение

(1)

где - матрица смежности графа , - произвольный граф, – -я вершина графа , - след матрицы . Математическим значением формулы (1) является количество циклов длины в графе , умноженное на .

Суммирование происходит от до , а это значит, что каждый цикл будет посчитан столько раз, сколько в нем вершин умноженное надвое т.к. цикл можно пройти как в одну, так и в другую сторону.

Т.к. матричные элементы обладают следующими свойствами:

(2)

то выражение будет принимать значение 1, если цикл длины существует, и 0, если такой цикл не существует.

Введем обозначение :

(3)

будем называть препятствием. Препятствия следует учитывать для исключения повтора вершин в цикле, что является необходимым условием для его простоты. Таким образом, формула (3)- это количество простых циклов длины в графе умноженных на . Следовательно, для вычисления всех простых циклов длины необходимо вычислить значение :

(4)

Для вычисления правой части формулы (3) необходимо воспользоваться следующими очевидными формулами:

(5)

(6)

где - матрица, все элементы которой равны 1.

Разберем пример. Задача: найти количество простых циклов длины 3 () в графе . Решением данной задачи является вычисление значения по формуле (4):

(7)

возведя матрицу смежности в куб и вычислив след полученной матрицы, мы вычислим количество простых циклов длины в графе . Следует заметить, что в данном примере отсутствуют препятствия.

Для удобства представления формул (1), (2) введем следующие обозначения:

(8)

формулы (2) будут иметь следующий вид:

(9)

Рассмотрим случай :

(10)

пользуясь обозначениями (8), (9) получаем:

(11)

Избавляясь от первого препятствия по формуле (5) получаем:

(12)

пользуясь формулами (2) упрощаем это выражение:

(13)

Избавляясь от второго препятствия имеем:

(14)

Вновь пользуясь формулами (2) для упрощения выражения получаем:

(15)

В общем виде результат будет иметь вид:

(16)

пользуясь (6) запишем следующим образом:

(17)

т.к. присутствуют одинаковые слагаемые, то после упрощения выражения получаем:

(18)

Таким образом, будет вычисляться следующим образом

(19)

Вычислить значение формулы (18) достаточно просто, для этого необходимо уметь умножать матрицы (возводить в квадрат), а так же вычислять след матрицы. Если оценивать сложность умножения матриц, а это умножение таблиц смежности, содержащих только 0 и 1, то получим , где – размер матрицы.

Использование приведенных во введении методов означает, что для поиска всех простых циклов длины 4 в графе с вершинами необходимо совершить операций. Отсюда следует, что данные методы имеют сложность . Очевидно, что предложенный нами способ вычисления является эффективным по времени относительно общеизвестных методов, представленных во введении.

Литература

1. Оре О. Графы и их применение.- М.: Мир, 1965. - 175 с.
2. Девитин А. Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. - М.: Вильямс, 2006. - 576 с.
3. А.В. Радионова - Демонстрационная компьютерная модель «Обход графов» // Молодой ученый. - 2012. - № 8. - С.42-45.
4. Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов. - М.: Наука, 1987. -304 с.