

Чернов С.А.

Кандидат технических наук, преподаватель колледжа Экономики и информатики,
Ульяновский государственный технический университет

АВТОМАТИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКО-ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация

Рассматривается численная реализация задачи МКЭ. Приведены матрицы жесткости и преобразования координат тонкостенного стержневого КЭ, функциональные возможности программы.

Ключевые слова: тонкостенный стержневой КЭ, матрица жесткости, матрица преобразования координат, программа для ЭВМ

Key words: Keywords: thin-walled rod finite elements, stiffness matrix, matrix coordinate transformations, the computer program

Известно, что за основной характер распределения продольных перемещений для всех концевых сечений тонкостенных стержней, образующих узел, принимается эпюра главных секториальных координат. Это приводит к уравнению равновесия бимоментов в узле, которое справедливо только для плоских рам с определенной конструкцией узловых соединений, т. е. рама, состоящая из тонкостенных стержней, называется плоской, согласно [1,338], если она и сечения стержней удовлетворяют следующим условиям:

1) проходящие через центры тяжести сечений продольные оси, а также одна из главных осей поперечных сечений лежат в одной плоскости;

2) продольные оси, проходящие через центры изгиба всех стержней рамы, лежат в одной плоскости, которая называется плоскостью рамы;

3) в узлах рамы депланация Φ'_x концов всех сходящихся стержней одна и та же. Для этого необходимо, чтобы продольные линии, проходящие через секториальные нулевые точки соответствующих элементов контура всех стержней узла, сходились в одной точке и чтобы производные секториальных координат ω' (углы наклона секториальной эпюры ω) для соответствующих элементов контура были равны между собой;

4) опоры рамы устроены так, что от нагрузки, действующей в плоскости рамы, все силы и деформации параллельны плоскости рамы.

В реальных стержневых системах часто имеют место эксцентриситеты осей стержней, вызываемые конструктивной необходимостью. Неплоскую раму [1,433] можно рассматривать как плоскую, если наибольший вертикальный эксцентриситет в узле рамы не превосходит половину высоты наименьшего из элементов, а наибольший горизонтальный эксцентриситет не превышает удвоенную толщину стенки наименьшего из элементов, сходящихся в узле.

В алгоритме программы используется стандартная процедура МКЭ определения вектора внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат $X^0Y^0Z^0$ [2,107; 3,45]:

$$\{S_k^0\} = [K_k^0][A]([A]^T [K_k^0][A])^{-1} \{P^0\} = [K_k^0][A]\{Z^0\},$$

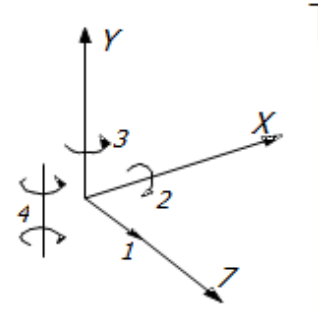
где $\{S_k^0\}$ – вектор внутренних узловых сил конструкции, состоящий из блоков (клеток) векторов $\{S_r^0\}$ внутренних узловых сил конечных элементов (КЭ); $[K_k^0]$ – квазидиагональная матрица жесткости конструкции, состоящая из блоков матриц

жесткости КЭ $[K_r^0]$ в общей системе координат; $[A]$ – матрица соответствий; $\{P^0\}$ – вектор узловой нагрузки; $\{Z^0\}$ – вектор узловых перемещений.

Для вычисления элементов матрицы жесткости тонкостенного стержневого КЭ, используемого для моделирования произвольной плоско-пространственной тонкостенной стержневой системы, используется секториальная геометрическая характеристика J_ω сечения стержня [4,6]:

$$[K_r] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & -D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{\ell} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & B\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 & A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & C\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 \\ -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & -D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{\ell} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & C\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 & A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & B\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 \\ \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & -D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{\ell} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & B\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 & A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & C\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 \\ \frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EJ_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & -D\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^3} & 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{\ell} & 0 & \frac{6EJ_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & B\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 & A\frac{EJ_\omega}{\mu\ell^2} & 0 & C\frac{EJ_\omega}{\mu\ell} & 0 \end{bmatrix}$$

Симметрично



где E – модуль упругости материала; G – модуль сдвига; F – площадь сечения стержня; ℓ – длина стержня; J_x , J_y – моменты инерции сечения относительно осей X , Y ; β – упругая изгибно-крутильная характеристика стержня:

$$\beta = \ell \sqrt{\frac{GJ_x}{EJ_\omega} \mu};$$

μ – коэффициент искажаемости контура тонкостенного сечения замкнутого профиля ($\mu = 1$ для открытого сечения); A , B , C , D – коэффициенты:

$$A = \frac{\beta^2(ch\beta - 1)}{2 - 2ch\beta + \beta sh\beta}, \quad B = \frac{\beta(\beta ch\beta - sh\beta)}{2 - 2ch\beta + \beta sh\beta},$$

$$C = \frac{\beta(sh\beta - \beta)}{2 - 2ch\beta + \beta sh\beta}, \quad D = \frac{\beta^3 sh\beta}{2 - 2ch\beta + \beta sh\beta}.$$

Правило знаков для изгибно-крутильных кинематических и силовых факторов следующее.

Депланация Φ'_x тонкостенного сечения положительная, если она соответствует положительному приращению угла закручивания Φ_x .

Бимомент положительный, если ближайшая к наблюдателю полка профиля по оси Y местной системы координат поворачивается относительно задней полки против часовой стрелки или по часовой стрелке – по оси Z .

Положительный бимомент соответствует отрицательному приращению деформации Φ'_x сечения согласно уравнению кручения стержня:

$$B_{\omega} = -EJ_{\omega} \Phi''_x.$$

Матрицы $[T_r]$ ортогонального преобразования координат балочного и тонкостенного стержневого КЭ определяются выражениями:

$$[T_r] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad [T_r] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{zz^0} & \lambda_{zx^0} & \lambda_{zy^0} \\ \lambda_{xz^0} & \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} \\ \lambda_{yz^0} & \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} \end{bmatrix}.$$

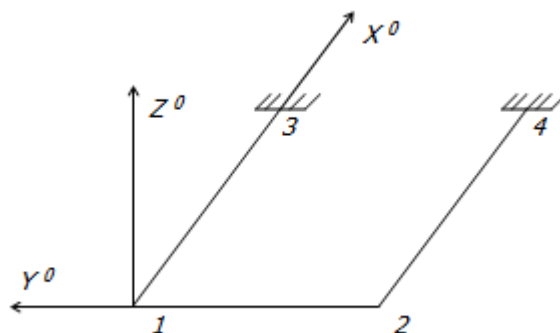
Направляющие косинусы осей Z , X и Y , соответственно:

$$\begin{cases} \lambda_{zz^0} \\ \lambda_{zx^0} \\ \lambda_{zy^0} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \lambda_{xz^0} \\ \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \end{cases} = \frac{1}{\ell_{1-2}} \begin{cases} 0 \\ x_2^0 - x_1^0 \\ y_2^0 - y_1^0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \lambda_{yz^0} \\ \lambda_{yx^0} \\ \lambda_{yy^0} \end{cases} = \frac{1}{\ell_{1-2}} \begin{cases} 0 \\ -(y_2^0 - y_1^0) \\ x_2^0 - x_1^0 \end{cases},$$

где x^0, y^0 – координаты соответствующих узлов элемента в общей системе координат; ℓ_{1-2} – длина стержня:

$$\ell_{1-2} = \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2}.$$

В качестве теста рассматривалась симметричная плоско-пространственная тонкостенная рама [1,386], представленная на рисунке.



Конечно-элементная модель П-образной рамы

Общая характеристика программы (Свид. о гос. регистр. программы для ЭВМ № 2011616979).

ЭВМ: IBM PC-совместимый ПК; Язык: Fortran; ОС: Windows; Объем: 36,4 Кб исходного текста.

Программа обеспечивает выполнение следующих функций:

- расчет произвольной плоско-пространственной стержневой системы на основе балочного и (или) тонкостенного стержневого КЭ,
- расчет от заданной нагрузки и (или) заданных перемещений,
- учет шарниров по всем степеням свободы в узле в начале и конце стержня в местной и (или) общей системах координат,
- учет упруго-оседающих опор.

В результате расчета определяются перемещения узлов, внутренние силовые факторы и нормальные напряжения в четырех точках сечений в узлах стержневых КЭ.

При вводе исходных данных единицы измерений силы и длины могут быть выбраны расчетчиком и определяются соответствующими единицами измерений модуля упругости материала.

Литература:

1. Д.Б. Бычков – Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.
2. В.И. Мяченков, [и др.] – Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
3. И.Ф. Дьяков, С.А. Чернов – Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 133 с.
4. С.А. Чернов – К расчету пространственной тонкостенной стержневой системы // Автоматизация и современные технологии. – 2008. – № 2. – С. 3–7.