Султыгов М.Д. ©
Кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики,
Ингушский государственный университет

ФУНКЦИИ БАЗИЛЕВИЧА $B_D(\lambda,\alpha,\beta)$ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация

Приводятся необходимые и достаточные условия принадлежности голоморфных функций к классу функций Базилевича многих комплексных переменных, устанавливается изоморфизм классов голоморфных функций.

Ключевые слова: Функции Базилевича, изоморфизм классов функций, суперпозиция операторов, обратный оператор.

Summary

We present the necessary and sufficient conditions for the holomorphic functions belonging to the class of Bazilevich functions of several complex variables, set the isomorphism classes of holomorphic functions

Keywords: Bazilevich functions, the isomorphism classes of functions, superposition operators, the inverse operator.

Целью настоящей статьи является распространение на случай нескольких комплексных переменных классов функций И.Е.Базилевича [1] и Сильвиа Е.М. [2].

Голоморфную функцию $f(z)\in(D\subset C^n)$, удовлетворяющую условию

$$Re\frac{e^{i\lambda}\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)}>0$$

где $|\lambda|<$ будем называть λ – спиралеобразной функцией относительно нуля и обозначим класс таких функций через $S_D(1,\lambda,0)$ $[3]-[5]$.

Здесь $\mathcal{R}_\gamma[f(z)]=\gamma f(z)+\sum_{j=1}^{n} z_j\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$ [6, с. 966] и обратным к оператору $\mathcal{R}_\gamma[f(z)]$ является оператор $\mathcal{R}_\gamma^{-1}f(z)=\int_0^1\varepsilon^{\gamma-1}f(\varepsilon z_1,\dots,\varepsilon z_n)d\varepsilon.$ Этот класс является распространением на случай нескольких переменных функций Л.Шпачека [7] и он показал, что функции этого класса однолистны. В 1967 г. Р.Либера [8] расширил это определение на λ - спиралеобразные функции порядка $\beta, 0\le\beta<1$, одного комплексного переменного. Критерий принадлежности голоморфных функций нескольких переменных $f(z)$ к λ – спиралеобразным функциям порядка $\beta, 0\le\beta<1$, который мы обозначим через $S_D(1,\lambda,\beta)$, будет являться условие

$$Re\frac{e^{i\lambda}\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)}>\beta cos\lambda.$$

Пусть функция $f(z)\in H(D)$ имеет разложение

$$f(z)=1+\sum_{|k|=1}^{\infty}a_k z^k,$$

где $k=(k_1,\dots,k_n)\in N^n$ –мультииндекс, $|k|=\sum_{i=1}^{n}k_i$, $z^k=z_1^{k_1}\times\dots\times z_n^{k_n}$ и удовлетворяет условию $f(z)\cdot\mathcal{R}_1 f(z)\neq 0$.

Голоморфную функцию $f(z)$ нескольких комплексных переменных мы будем считать функцией класса Базилевича $B_D(\lambda,\alpha,\beta)$ [9], если

$$Re\left\{\left(e^{i\lambda}-\alpha\right)\frac{\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)}+\alpha\frac{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_1 f(z)}{\mathcal{R}_1 f(z)}\right\}>\beta cos\,\lambda,$$

где $0\le\alpha<\infty, 0\le\beta<1, |\lambda|<\frac{\pi}{2}$.

Теорема 1. Если $f(z) \in B_D(\lambda, \alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$, то $B_D(\lambda, \alpha, \beta) \subseteq B_D(\lambda, 0, \beta) \equiv BS_D(\lambda, \beta)$.

Теорема 2. Если $f(z) \in B_D(\lambda, \alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$, то при всех $0 < \alpha_1 < \alpha$, $B_D(\lambda, \alpha, \beta) \subset B_D(\lambda, \alpha_1, \beta)$.

Определение 1. Назовем $f(z) \in H(D)$ функцией Базилевича типа $\vartheta + i\mu$ нескольких комплексных переменных

$$f(z) = \left\{(\vartheta + i\mu) \int_0^1 [\sigma(\varepsilon z)]^{\vartheta} \varepsilon^{\vartheta - 1 + i\mu} d\varepsilon\right\}^{\frac{1}{\vartheta + i\mu}},$$

где $\sigma(z) \in M_D(\beta)$ [10,с.166], $0 < \vartheta < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, а степенная функция понимается в смысле главного значения.

Для характеристики элементов класса $B_D(\lambda, \alpha, \beta)$ мы воспользуемся функциями класса $B_D(\vartheta + i\mu)$, где $\vartheta = \frac{cos\lambda}{\alpha}$ и $\mu = \frac{sin\lambda}{\alpha}$.

Определение 2. Пусть функция $f(z) \in H(D)$ имеет разложение $f(z) = 1 + \sum_{|k|=1}^{\infty} a_k z^k$. Голоморфную функцию $f(z)$ нескольких комплексных переменных мы будем называть функцией Базилевича типа $\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}$ и порядка β [11], если

$$f(z) = \left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} \int_0^1 [\sigma(\varepsilon z)]^{\frac{cos\lambda}{\alpha}} \varepsilon^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} - 1} d\varepsilon\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}} \qquad (1)$$

для некоторой $\sigma(z) \in M_D(\beta)$. Класс функций с условием (1), где степенную функцию понимают в смысле главного значения, обозначим через $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right)$.

Непосредственно из определения 2 вытекает

Теорема 3. $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right) \subset B_D(\lambda, \alpha, \beta), 0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta < 1, |\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$.

Лемма 1. Функция $\sigma(z) \in M_D(\beta)$ тогда и только тогда, когда существует некоторая функция $F(z) \in B_D(\lambda, 0, \beta)$ такая, что

$$[\sigma(z)]^{cos\lambda} = [F(z)]^{e^{i\lambda}}.$$

Лемма 2. [12]. Функция $f(z)$ принадлежит классу $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right)$ тогда и только тогда, когда существует некоторая функция $F(z) \in B_D(\lambda, 0, \beta)$ такая, что

$$f(z) = \left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}} [F(z)]^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}}$$

где степенная функция понимается в смысле главного значения.

Замечание 1.Согласно лемме 2,необходимым и достаточным условием того, что $f(z) \in B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta\right)$ является принадлежность функции

$$F(z) = f(z)\left\{\frac{\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}} \qquad (2)$$

классу $F(z) \in B_D(\lambda, 0, \beta)$.

Лемма 3.Пусть $f(z) \in B_D(\lambda, \alpha, \beta)$ и для $\gamma, 0 \leq \gamma < 1$, выбрана ветвь такая, что $\left\{\frac{\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)}\right\}^{\gamma e^{-i\lambda}}|_0 = 1$. Тогда функция $F_\gamma(z)$=$f(z)\left\{\frac{\mathcal{R}_1 f(z)}{f(z)}\right\}^{\gamma e^{-i\lambda}}$ является функцией класса $B_D(\lambda, 0, \beta)$.

Лемма 4.Если функция $F(z) \in B_D(\lambda, 0, \beta)$,то $F(z)$ можно представить в виде (2),где

$$f(z) = \left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}} [F(z)]^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}} \qquad (3)$$

функция класса $B_D(\lambda, \alpha, \beta)$.

Теорема 3. [13]. Необходимым и достаточным условием принадлежности голоморфной функции $f(z)$ классу $B_D(\lambda,\alpha,\beta)$ является ее интегральное представление

$$f(z)=\left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}L^{(-1)}_{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}[F(z)]^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}}=\left\{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}\int_0^1[F(\varepsilon z)]^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}}\ \varepsilon^{\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}-1}\right\}^{\alpha e^{-i\lambda}} \qquad (4)$$

где функции $F(z)$ принадлежат $B_D(\lambda,0,\beta)$.

Доказательство. Если функция $f(z)$ имеет вид (4), то из теоремы 3 и леммы 4 непосредственно вытекает, что $f(z)\in B_D(\lambda,\alpha,\beta)$. Если $f(z)\in B_D(\lambda,\alpha,\beta)$, то согласно лемме 2 и лемме 3 функцию $f(z)$ можно представить в виде (4). Отметим только, что $B_D\left(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha},\beta\right)\equiv B_D(\lambda,\alpha,\beta)$ для всех $0\le\ \alpha<\infty, 0\le\beta<1, |\lambda|<\frac{\pi}{2}$.

Литература

1. Базилевич И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций.//Математический сборник.-1964.-Т.64.-103.-С.628-630.
2. Silvia E.M. On a subclass of spiral-like functions: Proc. Amer. Math. Soc., vol.44, No2, 1974, pp.411-420.
3. Султыгов М.Д. О функции Базилевича нескольких комплексных переменных//Вестник науки и образования. - М.-2016.-№7(19).-С.11-15.
4. Султыгов М.Д. Классы спиралеобразных функций двух комплексных переменных. // Сб. научных трудов ИнгГУ.- Магас.- 2002.- № 1.-С.486 - 501.
5. Султыгов М.Д. О коэффициентах Тейлора для спиралеобразных функций многих комплексных переменных. // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.- № 6-1.- Москва, 2015. - С.17-20.
6. Темляков А.А. Интегральные представления функций двух комплексных переменных //Доклады академии наук СССР.-1958.-Т.-120.-№5.С.976-979.
7. Špaček L. Pricpevek k teorii funci prostysh: Časopis pro pest. Mat. a fys., 1932, 62, p.12-19.
8. Libera R.J. Univalent α-spiral functions: Canada J. Math., vol.19, 1967, pp.449-456.
9. Султыгов М.Д. О структурных формулах для некоторых классов голоморфных функций в пространстве C^n.// Актуальные проблемы современной науки. №3(82),Москва.,2015.С.175-181.
10. Баврина К.П. Обобщение звездно однолистных функций порядка α на случай двух комплексных переменных //- МОПИ им. Н.К.Крупской -1972. Выпуск 15. №2. С.165--176.
11. Султыгов М.Д. Функции Базилевича многих комплексных переменных. // III МНПК «Современные тенденции в фундаментальных и прикладных исследованиях». Рязань.- 2015 - С.9-10.
12. Султыгов М.Д. About Bazilevich functions of several complex variables. // "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" Тезисы докладов XII МНК. ВНЦ РАН РФ, ЮМИ, СОГУ имени К.Л. Хетагурова, ЮФУ.-2016. -С.106-107.
13. Султыгов М.Д. Интегральные представления некоторых классов голоморфных функций в пространстве многих комплексных переменных.// Известия Чеченского государственного педагогического института.- №2(10), Грозный, 2015.С. 19-23.